

§6. Логарифмы с переменным основанием.

Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$

Рассмотрим выражение $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$.

По определению, для любого $c > 0, c \neq 1$

$$\log_{a(x)} f(x) = \frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}$$

(02)

т. е. $y(x)$ – это частное двух логарифмов, и областью определения (ОДЗ) является множество X , на котором

$$\underline{f(x) > 0, a(x) > 0, a(x) \neq 1.}$$

Рассмотрим уравнение $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$.

ОДЗ: $a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$.

Воспользуемся определением (02) и получим в ОДЗ

$$\begin{aligned} \log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) &\Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)} = \frac{\lg g(x)}{\lg a(x)} \Leftrightarrow \lg f(x) = \lg g(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = g(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ в ОДЗ.}}$$

(УР ЛЗ)

Можно записать полное условие равносильности

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases} \quad (\text{УР ЛЗ*})$$

Пример 11. (МФТИ, 1981) Решите уравнение

$$2 \log_x (4 + \sqrt{x}) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2.$$

$$\diamond \quad 2 \log_x (4 + \sqrt{x}) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2 \Leftrightarrow \log_x (4 + \sqrt{x}) = 1 - \log_x 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x (4 + \sqrt{x}) = \log_x \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 8 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Ответ: 16. \diamond

Метод интервалов для логарифмических и показательных неравенств.

В курсе математического анализа для 10-го класса доказывается теорема:

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и не обращается в 0 на открытом промежутке (a, b) , то $f(x)$ имеет один и тот же знак во всех внутренних точках отрезка $[a; b]$.

Это и есть основание для метода интервалов для непрерывной функции: найти нули $f(x)$ и определить знаки $f(x)$ на промежутках между соседними нулями, вычислив значения в пробных точках.