

§5. Сложная экспонента. Уравнение вида $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим выражение $y(x) = a(x)^{f(x)}$. Что это за функция, какова ее область определения?

По определению, полагают, для любого $c > 0, c \neq 1, a(x) > 0$

$$\boxed{a(x)^{b(x)} = c^{b(x) \log_c a(x)}} \quad (01)$$

Рассмотрим уравнение $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

ОДЗ: $a(x) > 0$.

$a(x)^{f(x)} = 10^{f(x)\lg a(x)}$, $a(x)^{g(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)}$, тогда

$$10^{f(x)\lg a(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x) = g(x)\lg a(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg a(x)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg a(x) = 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \text{ Следовательно,}$$

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \text{ в ОДЗ.}} \quad (\text{УР ПЗ})$$

или

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}} \quad (\text{УР ПЗ*})$$

Замечание. Мы не решаем уравнение $(-2)^x = -8$, потому что $(-2)^3 \neq (-2)^{\frac{12}{4}}$, где левая часть существует, а правая часть не определена (в уравнении нет ограничений для x , и оно может принимать рациональные значения!). Однако, мы решаем уравнение $(-2)^n = -8$, где *заранее* задано, что n – число целое (операции возведения в рациональную степень и натуральную степень разные! Вспомним, кстати, что $\sqrt[3]{-8} \neq (-8)^{\frac{1}{3}}$, т. к. левая часть существует, а правая – нет).

Пример 9. Решите уравнение $x^{x^2} = x^{-2-3x}$.

♦ ОДЗ: $x > 0$.

$$\text{В ОДЗ } x^{x^2} = x^{-2-3x} \Leftrightarrow 10^{x^2 \lg x} = 10^{(-2-3x)\lg x} \Leftrightarrow \lg x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x(x+2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Корни -1 , -2 *не входят в ОДЗ*. Это, несмотря на то, что $(-1)^1 = (-1)^1$, $(-2)^4 = (-2)^4$.

Ответ: $\{1\}$. ♦

Пример 10. (МГУ, 1998, химфак.) При каких значениях параметра a уравнение

$(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x + (\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x = 2(\sqrt{2})^x$ имеет единственное решение?

♦ Сначала упростим левую часть уравнения. Замечаем, что

$$(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x = \frac{2^x}{(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x}.$$

Пусть $t = (\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x$, тогда уравнение примет вид:

$$t + \frac{2^x}{t} = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow t^2 - 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \cdot t + 2^x = \left(t - 2^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6})^x = 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \text{В силу (УР ПЗ),}$$

$$x \lg(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}) = x \lg \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} = \sqrt{2}. \end{cases} \quad (*)$$

Мы видим, что при любом значении параметра a есть решение $x = 0$, поэтому для единственности решения уравнения необходимо и достаточно, чтобы второе уравнение совокупности не имело решений.

ОДЗ (*): $x^2 - 3ax + 6 \geq 0$.

Если $x^2 - 3ax + 6 > 0$, то $\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} > \sqrt{2}$.

Если $x^2 - 3ax + 6 = 0$, то $\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} = \sqrt{2}$.

Заданное уравнение имеет единственное решение ($x = 0$ является решением данного уравнения при любом a !), если уравнение

$x^2 - 3ax + 6 = 0$ не имеет решений, что имеет место тогда и только тогда, когда $9a^2 - 24 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. ♦