

§3. Показательные уравнения

Из монотонности показательной функции следует, что

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y.$$

Из свойств показательной функции следует, что, если $a > 0, a \neq 1$, то простейшее показательное уравнение $a^x = b$ при $b \leq 0$ не имеет решения, а при $b > 0$ имеет единственный корень $x = \log_a b$.

Для успешного решения большинства учебных примеров решающим является умение преобразовать исходное уравнение к более простому. Более простыми можно считать два основных уравнения:

1. $a^{f(x)} = b(x) \Leftrightarrow f(x) = \log_a b(x)$,
2. $g(a^{f(x)}) = 0$.

Уравнение 2 заменой переменной $a^{f(x)} = t$ сводится к уравнению $g(t) = 0$, у которого отыскиваются положительные корни, а затем решаются уравнения типа 1. Заметим, что

$$1^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow 1 = g(x), \quad 0^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Пример 1. (МГУ, 1970). $4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

$$\begin{aligned} \diamond 4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} &\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2\sqrt{3x^2-2x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right)^2 - 9\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2\right)\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{-1}{3}; \end{cases} \\ \sqrt{3x^2-2x} = -2 \Leftrightarrow \emptyset. \end{cases}$$

Ответ. $1, \frac{-1}{3}$. \diamond

Пример 2. $8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} = 0$.

$$\diamond 8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 13 \cdot 2^{2x} 3^x - 2^x 3^{2x} + 13 \cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3x} \left(1 - 13 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^x - \left(\frac{3}{2} \right)^{2x} + 13 \left(\frac{3}{2} \right)^{3x} \right) = 0 \quad (*)$$

Пусть $\left(\frac{3}{2} \right)^x = t > 0$, тогда (*) примет вид $1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0$.

$$1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0 \Leftrightarrow (1 - t^2)(1 - 13t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1; \frac{1}{13} \Rightarrow x = 0; -\log_{\frac{3}{2}} 13.$$

Ответ: $0, -\log_{\frac{3}{2}} 13$. ♦

Пример 3. $500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}}$.

$$\diamond 500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 5^3 2^2 2^{3x} = 2^3 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 5^{\frac{1}{x}-3} \Leftrightarrow (3x-1) \log_2 2 = \frac{1}{x} - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_5 2 - 3 \pm (\log_5 2 + 3)}{6 \log_5 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x = -\log_2 5. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{3}, -\log_2 5$. ♦

Пример 4. $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} = 5$. ♦ Это уравнение удается решить, используя то, что левая часть уравнения является строго убывающей функцией, которая любое положительное значение принимает только один раз. Подбором убеждаемся, что $x = -1$.

Ответ: -1 . ♦

Пример 5. (МГУ, 1997, псих. ф – т.) При каких действительных p уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

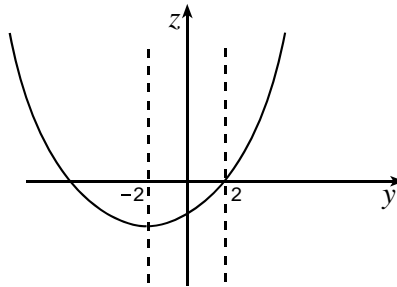
$$\blacklozenge 4^x + 4 \cdot 2^x + 7 + \frac{4}{2^x} + \frac{1}{4^x} - p = 0 \Leftrightarrow 4^{2x} + 4 \cdot 4^x \cdot 2^x + (7-p) \cdot 4^x + 4 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

Пусть $t = 2^x > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$t^4 + 4t^3 + (7-p)t^2 + 4t + 1 = t^2 \left(t^2 + 4t + (7-p) + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} \right) = 0.$$

Это возвратное уравнение. Оно решается заменой переменных $y = t + \frac{1}{t}$, причем $y = \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{(t-1)^2 + 2t}{t} = 2 + \frac{(t-1)^2}{t} \geq 2$ для любого $t > 0$. Уравнение принимает вид

$$\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right) + 4 \left(t + \frac{1}{t} \right) + (5-p) = y^2 + 4y + (5-p) = 0.$$



Так как вершина параболы $z = y^2 + 4y + (5-p)$ расположена слева от оси z и ветви направлены вверх, то корень $y_0 \geq 2$ существует тогда и только тогда, когда $z(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 8 + 5 - p \leq 0 \Leftrightarrow p \geq 17$.

Ответ: $[17; +\infty)$ \blacklozenge