

§1. Введение

Напомним основные свойства показательной и логарифмической функций.

В школе принимается без доказательства, что для любых положительных чисел a и b и любых действительных чисел α и β справедливы свойства:

$$C1. a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}. \quad C2. \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$$

$$C3. a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha. \quad C4. \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha.$$

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то функция a^x отлична от постоянной. Ее называют показательной функцией с основанием a . Если $a > 1$, то функция a^x – монотонно возрастающая на R ; если $0 < a < 1$, то функция a^x – монотонно убывающая на R . Область значений показательной функции – множество R_+ всех положительных чисел. Отсюда и из монотонности следует, что, если $a > 0$, $a \neq 1$, то для любого положительного числа N существует единственное число x , такое, что $a^x = N$. Это число называется логарифмом числа N по основанию a и обозначается $\log_a N$. Из определения следует, что

$$a^{\log_a N} = N \text{ в ОДЗ}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством в ОДЗ (только для $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$).

В школе показывается, что, если $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, α – любое действительное число, то верны формулы

$$C5. \log_a MN = \log_a M + \log_a N. \quad C6. \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

$$C7. \log_a M^\alpha = \alpha \log_a M.$$

$$C8. \text{Если, к тому же, } b > 0, b \neq 1, \text{ то } \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Последняя формула позволяет переходить от логарифма по основанию a к логарифму по основанию b . Она называется формулой перехода к новому основанию.

Свойства 5 – 8 при вышеописанных условиях ($M > 0, N > 0$) являются тождествами и читаются как справа налево, так и слева направо.

Заметим, однако, что левые и правые части равенств в C5 и C6 имеют разные области определения: левая часть определена при $MN > 0$, а правая – при $M > 0, N > 0$. Это надо учитывать при решении задач: $MN > 0$ не только тогда, когда $M > 0, N > 0$, но и тогда, когда $M < 0, N < 0$. Учтем, что $MN = (-M)(-N)$, и для $-M > 0, -N > 0$ (в силу C5) $\log_a(-M)(-N) = \log_a(-M) + \log_a(-N)$.

Теперь запишем более общую формулу

$$C5^*. \text{Если } MN > 0, \text{ то } \log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N|.$$

$$C9. \text{Если } M \neq 0, N \neq 0, \text{ то } \log_a |M| + \log_a |N| = \log_a |MN|.$$

Аналогично показывается, что

$$C6^*. \text{Если } MN > 0, \text{ то } \log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|.$$

$$C10. \text{Если } M \neq 0, N \neq 0, \text{ то } \log_a |M| - \log_a |N| = \log_a \left| \frac{M}{N} \right|.$$

$$C7^*. \text{Если } M \neq 0, \text{ то для любого натурального } n \text{ верно, что } \log_a M^{2n} = 2n \log_a |M|.$$

Все свойства читаются в обе стороны (т. е. являются тождествами), при выполнении приведенных для каждого из них условий.