

**Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)**

МАТЕМАТИКА

Тригонометрические уравнения

Задание №4 для 10-х классов

(2006-2007 учебный год)



г. Долгопрудный, 2006

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 10-х классов (2006-2007 учебный год). - М.: МФТИ, 2006, 32 с.

Составитель:

Колесникова Софья Ильинична

Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 30.11.06

Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 2100. Заказ № 9-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел./факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

***E.mail:* zftsh@pop3.mipt.ru**
Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ФЗФТШ при МФТИ, 2006

Дорогие десятиклассники!

Высылаем Вам задание, в котором много задач по тригонометрии. Нам известно, что не все еще прошли этот материал. Поэтому попробуйте самостоятельно прочитать материал по учебнику, а потом изучите методичку. Решайте только те задачи, которые можете. На всякий случай, напишите на обложке, что в школе Вы тригонометрию еще не изучали.

§1. Определение функции. Числовые функции и их графики

Пусть X и Y - произвольные множества. Говорят, что на X задано отображение, или задана функция, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие **единственный** элемент y множества Y . Закон соответствия обычно обозначается какой-нибудь буквой, часто буквой f , а само соответствие обозначается $f: X \rightarrow Y$ или $y = f(x)$. При этом $x \in X$ называется независимой переменной, или аргументом функции $f(x)$, а y называется значением функции, или образом элемента x .

Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Подмножество множества Y , состоящее из образов всех элементов X , называется образом множества X , или множеством значений функции $f(x)$, и обозначается $f(X) \subset Y$, или $E(f) \subset Y$.

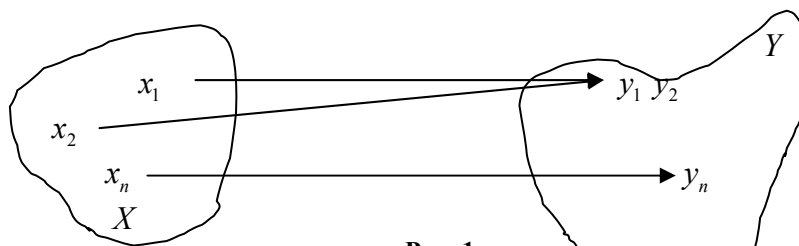


Рис. 1.

Например, на рис. 1 $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_n) = y_n$. При этом различным элементам множества X может соответствовать один и тот же элемент множества Y ($y_1 = f(x_2) = f(x_1)$), но **одному элементу множества X должен соответствовать один элемент из множества Y .**

Пример 1. Поставим в соответствие каждому человеку планеты его группу крови. Тогда X состоит из нескольких миллиардов человек, а $f(X)$ состоит из 4-х чисел. Замечаем, что очень многим элементам множества X ставится в соответствие одно и то же число.

Пример 2. Поставим каждому человеку планеты отпечаток большого пальца его правой руки. Теперь X – то же, что и примере 1, а $f(X)$ – множество “картинок”. Как известно, у разных людей разные отпечатки!

В алгебре и математическом анализе мы, в основном, изучаем **числовые** функции, где множества X, Y являются подмножествами, например, числовой оси. Тогда $f(X)$ называется **множеством значений** функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции $y = f(x)$ на координатной плоскости (x, y) называется множество точек $(x, f(x))$.

Пример 3. (графики на рис. 2).

а) $g : R_+ \cup \{0\} \rightarrow R : y = \sqrt{x} (D(g) = R_+ \cup \{0\}, E(g) = R_+ \cup \{0\})$.

б) $f : (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \rightarrow R : y = \frac{1}{x}. (E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty))$.

в) $f : R \rightarrow R : y = |x|$ (модуль, или абсолютная величина числа x). По определению,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (D(f) = R, E(f) = [0; +\infty) \equiv R_+ \cup \{0\}).$$

$$\text{г) } y = \operatorname{sign} x \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \Rightarrow D(y) = R, E(y) = \{-1, 0, 1\}. \quad (\text{читается “сигнум”, что означает “знак”}).$$

ся “сигнум”, что означает “знак”).

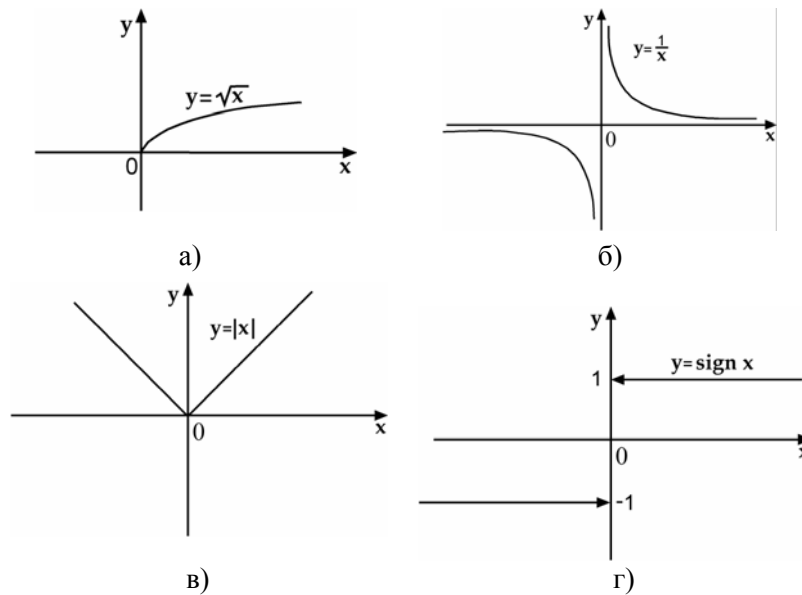


Рис. 2

Пример 4. Функция $y = [x]$ – целая часть числа x . Величина $[x]$ определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x . Если $x \in [0;1)$, то $[x]=0$. Если $x \in [1;2)$, то $[x]=1$. Если $x \in [2;3)$, то $[x]=2$ и т.д. Рассмотрим теперь отрицательные значения x . Если $x \in [-1;0)$, то $[x]=-1$. Если $x \in [-2;-1)$, то $[x]=-2$ и т.д. График функции изображен на рис.3. Ясно, что $D(f) = R$; $E(f) = Z$ (так обозначается множество всех целых чисел).

Если функция задана формулой $y = f(x)$ и не задана область определения, то её областью определения называется множество всех x , для которых формула имеет смысл.

Пример 5.

а) $y = x^2$ (т. к. x^2 определено для любого x , то $D(y) = R$; функция не имеет обратной).

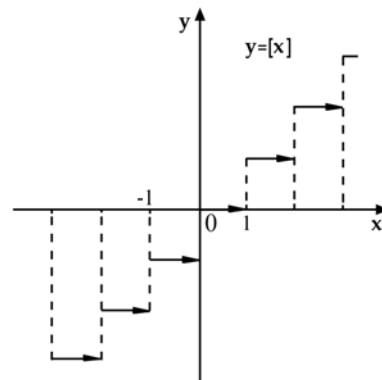


Рис. 3

б) $y = x^2, D(y) = [0; +\infty)$ (функция имеет обратную $x = \sqrt{y}$).

в) $y = \sin x, D(y) = R$, функция не имеет обратной).

г) $y = \sin x, D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (функция имеет обратную $x = \arcsin y$).

Функции пунктов а) и б) **различны**, т. к. у них разные области определения, хотя и одинаковые законы соответствия в общих областях! По этой же причине различны функции пунктов в) и г).

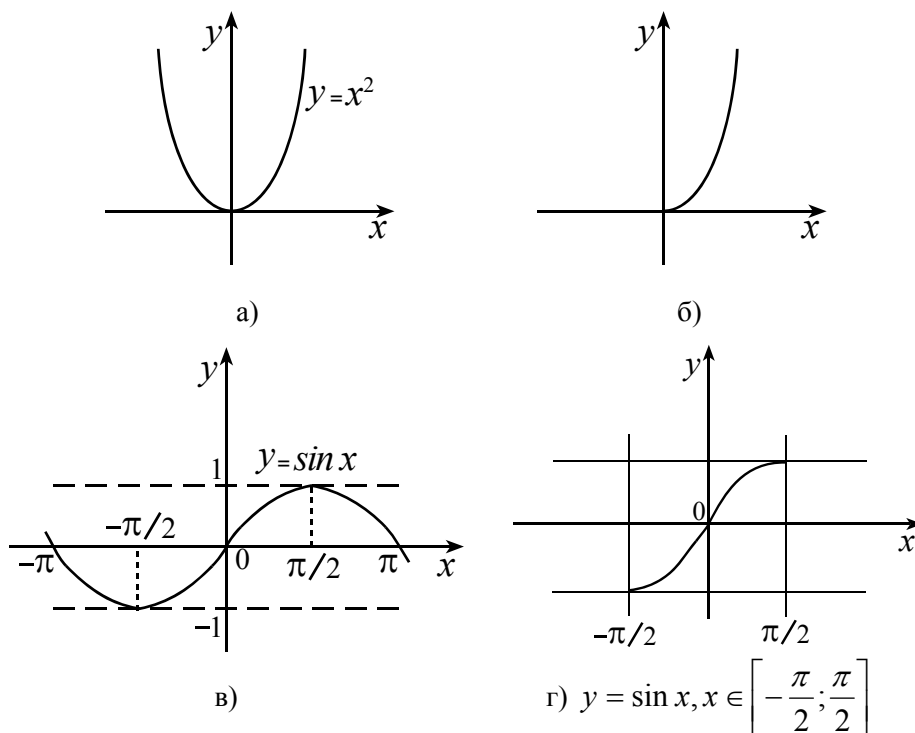


Рис. 4

§2. Обратная функция

Рассмотрим отображение $f: X \rightarrow f(X)$, или, что то же, $f: X \rightarrow E(f)$, (обратим внимание на то, что мы рассматриваем отображение не просто в Y , а в ту его часть, которая состоит из образов

всех $x \in X$) такое, что **различным** $x \in X$ соответствуют **различные** $y = f(x) \in Y$, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ (рис. 5). Такое отображение $f : X \rightarrow f(X)$ называется взаимно однозначным.

В этом случае соответствие между $f(X)$ и X также является функцией с областью определения Y и областью значений X (рис.5), т. к. каждому $y \in f(X) \equiv E(f)$, соответствует, по крайней мере, один $x \in X$, а, в силу взаимной однозначности отображения, ровно один. Эта функция называется *обратной* к функции f и обозначается f^{-1} . Отметим, что

$$D(f) = E(f^{-1}) = X; E(f) = D(f^{-1}) = Y.$$

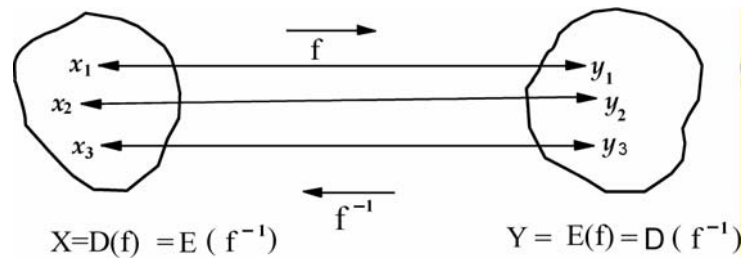


Рис. 5

Итак, **функция имеет обратную, если она осуществляет взаимно однозначное соответствие** между $D(f)$ и $E(f)$. (Поэтому, например, строго монотонная функция всегда имеет обратную.)

Пример 6. Отображение примера 1 не является взаимно однозначным. Отображение примера 2 является взаимно однозначным и даёт возможность идентифицировать человека по его отпечатку.

Пример 7. Рассмотрим функцию $y = x^3$.

Сравним значения функции в различных точках:

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 \equiv (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ т. е. рассматриваемое отображение взаимно однозначно.}$$

Любая горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график функции в

единственной точке. Абсцисса этой точки **обозначается** $\sqrt[3]{a}$. Она является единственным решением уравнения $x^3 = a$.

Функция $y = x^3$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между областью определения $D(f) = R$ и множеством значений $E(f) = R$. Поэтому существует обратная функция f^{-1} с областью определения $D(f^{-1}) = R$ и множеством значений $E(f^{-1}) = R$. Эта функция обозначается: $x = \sqrt[3]{y}$. Если переобозначить переменные более привычно, то формула примет вид: $y = \sqrt[3]{x}$ (график на рис. 6). Графики исходной функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ – биссектрисы первого и третьего координатных углов (x и y поменялись местами).

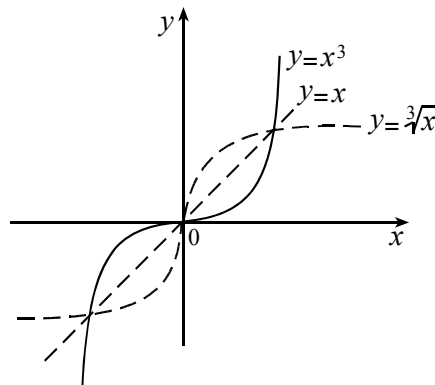


Рис. 6

Пример 8. Рассмотрим функцию $y = x^2$ (раз не указана область определения, то $D(f) = R$). Она не имеет обратной функции, так как различным $x_1 \neq 0$ и $x_2 = -x_1$ соответствует один $y = x_1^2 = x_2^2$, т. е. не существует взаимно однозначного соответствия между $D(f)$ и $E(f) = [0; +\infty)$.

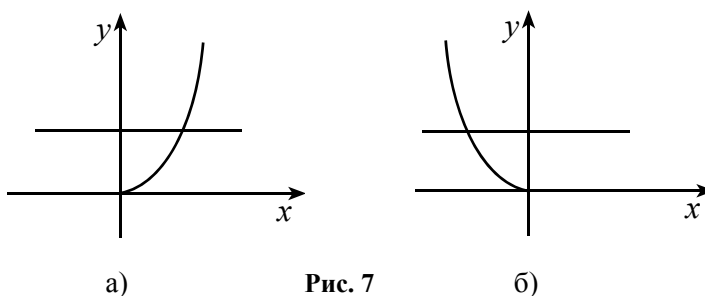


Рис. 7

Пример 9. Рассмотрим другую функцию: $y = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$

(рис. 7а). Любая прямая $y = a, a \geq 0$ пересекает кривую в единственной точке, абсцисса которой **обозначается** \sqrt{a} . В этом случае соответствие между $D(f) = [0; +\infty)$ и $E(f) = [0; +\infty)$

является взаимно однозначным, и существует обратная функция f^{-1} . Она обозначается:

$x = \sqrt{y}$ с областью определения

$D(f^{-1}) = [0; \infty)$ и множеством значений

$E(f^{-1}) = [0; \infty)$. В привычных переменных

это функция $y = \sqrt{x}$ (рис. 8).

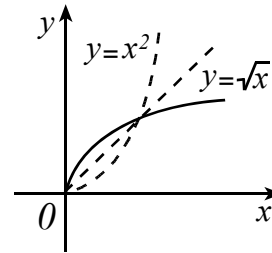


Рис. 8

Пример 10. Можно рассмотреть ещё одну

функцию: $y = x^2, D(f) = (-\infty; 0]$ (рис. 7б). Эта функция строго монотонна и тоже имеет обратную: $x = -\sqrt{y}$ с

$$D(f^{-1}) = [0; +\infty), E(f^{-1}) = (-\infty; 0].$$

§3. Монотонные функции. Четные и нечетные функции

Числовая функция $f(x)$, определённая на множестве X , называется возрастающей (убывающей) на этом множестве, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Функция возрастающая или убывающая на множестве, называется монотонной функцией. Для нас важно, что отсюда следует, что из $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, а, следовательно, любая **монотонная функция имеет обратную**. Монотонность элементарных функций можно доказывать непосредственно или с помощью производных (это будет позже). Можно рассматривать ещё так называемые не строго монотонные функции — это функции, для которых для любых

$x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ – это неубывающая функция, или для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ – невозрастающая функция. К ним относится функция $y = const$, которая является одновременно и неубывающей, и невозрастающей, и не имеет обратной.

Пример 11. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$. Формула имеет смысл для $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, что и будет $D(y)$. Исследуем разность $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$. Отсюда следует, что, если $x_2 > x_1$ и $x_1 x_2 > 0$, т. е. они одного знака, то разность отрицательна. Следовательно, функция убывает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0; +\infty)$, но не убывает на $D(y)$ (а потому не является монотонной на области определения), т.к. если $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ (что подтверждает правильность рис. 2б).

Функция $f(x)$ называется четной (нечетной) на X , если выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $-x \in X$, т. е. область определения симметрична относительно 0.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x) = f(-x)$ ($f(x) = -f(-x)$).

Если функция не является четной или нечетной, то говорят, что она является функцией общего вида.

Пример 12. Определить, являются ли четными, нечетными или функциями общего вида следующие функции:

$$\text{а) } y = \sqrt{x}, \quad \text{б) } y = \cos 4x, \quad \text{в) } y = \frac{x^3 - 4 \sin 2x}{\operatorname{ctgx}},$$

$$\text{г) } y = |x + 1| - |x - 1|, \quad \text{д) } y = \frac{x - 1}{x^2 + 4}.$$

♦ а) $y = \sqrt{x}$ является функцией общего вида, т. к. её область определения $D(y) = [0; +\infty)$ не симметрична относительно 0.

б) $y = \cos 4x$ – четная функция.

$$в) y = \frac{x^3 - 4 \sin 2x}{ctgx} - \text{чётная функция, т. к.}$$

1) область определения $D(y)$ этой функции, состоящая из объединения счётного множества интервалов вида $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$, симметрична относительно 0;

$$2) \text{ для любого } x \in D(y) \Rightarrow y(x) = y(-x).$$

$$г) y = |x+1| - |x-1| - \text{нечётная, т. к.}$$

$$y(-x) = |-x+1| - |-x-1| = -(|x+1| - |x-1|) = -y(x).$$

$$д) y = \frac{x-1}{x^2+4} - \text{функция общего вида, т. к., например,}$$

$$\begin{cases} 0 = y(1) \neq y(-1) = -\frac{2}{5}, \\ y(1) \neq -y(-1). \end{cases} \blacklozenge$$

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график любой нечётной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому для построения графиков таких функций достаточно построить их для положительных значений, а затем продолжить чётным или нечётным образом соответственно.

Посмотрим, как используется чётность функций при решении задач.

Пример 13. (МГУ, 1990, мехмат). Найти все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

◆ Заметим, что левая часть уравнения является чётной функцией на R . Поэтому, если уравнение имеет решение $x = x_0$, то $x = -x_0$ тоже является решением. Если $x_0 \neq -x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq 0$, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня. Поэтому, если корень один, то это $x = 0$. Посмотрим, при каких a уравнение имеет такой корень.

$$x = 0: -2a \sin 1 + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \begin{cases} 0, \\ 2 \sin 1. \end{cases}$$

Но при таких a уравнение может иметь, вообще говоря, и другие корни – такие a нам не подходят. Найдём все решения при полученных a .

$$a = 0 : x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$a = 2 \sin 1 : x^2 - 4 \sin 1 \sin \cos x + 4 \sin^2 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \sin 1 (\sin \cos x - \sin 1) \leq 0 \quad (\sin \cos x \leq \sin 1) \Leftrightarrow x = 0.$$

Итак, при этих a имеем единственное решение $x = 0$.

Ответ: $0; 2 \sin 1$. ♦

§4. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется периодической на X , если существует число $T \neq 0$, для которого выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $x + T \in X, x - T \in X$.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Если функция имеет период T , то любое число вида nT , $n \in Z$ – тоже период. Поэтому, говоря о периоде функции, часто имеют в виду наименьший положительный (НПП) период, если таковой существует. Из школы, например, известно, что $y = \sin x, y = \cos x$ имеют наименьший положительный период $T = 2\pi$, а $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ имеют наименьший положительный период $T = \pi$. Область определения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ не совпадает с R , но является периодичной с периодом π .

Не все периодические функции имеют наименьший положительный период: например, $y(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ является суммой двух функций, каждая из которых имеет наименьший положительный период π . Но сумма $y(x)$ НПП не имеет, т. к. $y = \sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, и её периодом является любое действительное число.

Пример 14. (МГУ, 1996, геогр. ф-т). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T = \sqrt{2}$. Найти значение $f(\sqrt{8})$, если известно, что $3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0$ и $f^2(-\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{8}) + \frac{20}{9} = 0$.

♦ В силу периодичности,

$$f(0) = f(k\sqrt{2}), k \in Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) = f(\sqrt{8}) = f(2\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{72}) = f(6\sqrt{2}).$$

Поэтому

$$\begin{cases} 3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0, \\ f^2(-\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{8}) + \frac{20}{9} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3f^2(0) + 7f(0) + 4 = 0, \\ f^2(0) + 3f(0) + \frac{20}{9} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2f(0) + 4 - \frac{20}{9} = 0 \Leftrightarrow f(0) = -\frac{4}{3}, \\ \frac{16}{9} - 4 + \frac{20}{9} = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$. ♦

Пример 15. (МГУ, 2000, ф-т почвоведения). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение $f(2x + 16) + 23 = 5f(x)$.

♦ В силу периодичности $f(x)$, во-первых, достаточно найти решения уравнения на любом отрезке длины 8, во-вторых, $f(2x + 16) = f(2x)$, поэтому $f(2x + 16) + 23 = 5f(x) \Leftrightarrow f(2x) + 23 = 5f(x)$.

Посмотрим, при каких n аргумент $f(2x + n \cdot 8)$ принадлежит промежутку, в котором определена $f(x)$, т. е.

$$0 \leq 2x + n \cdot 8 \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 2x \leq 8 - 8n \Rightarrow n \leq 1, \\ 16 \geq 2x \geq -8n \Rightarrow n \geq -2. \end{cases}$$

Рассмотрим каждый случай.

$$n = 1: 0 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$n = 0: 0 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow f(2x) = 8 \cdot 2x - (2x)^2 \Rightarrow 16x - 4x^2 + 23 = 40x - 5x^2 \Rightarrow x = 1,$$

$$n = -1: 0 \leq 2x - 8 \leq 8 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow f(2x) = f(2x - 8) = 8(2x - 8) - (2x - 8)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x - 64 - 4x^2 + 32x - 64 + 23 = 40x - 5x^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 105 = 0 \Rightarrow x = 7.$$

$$n = -2: 0 \leq 2x - 16 \leq 8 \Leftrightarrow 8 \leq x \leq 12.$$

Здесь уже нет необходимости рассматривать.

В силу периодичности, решениями будут числа

$$1 + 8 \cdot n, 7 + 8 \cdot m, n, m \in Z. \Rightarrow$$

Ответ: $1 + 8n, 7 + 8m; n, m \in Z.$ ♦

§5. Обратные тригонометрические функции

Рассмотрим не всю синусоиду, а только ее **часть**, определенную на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: функцию $y = \sin x, D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 4г). Любая прямая $y = a, a \in [-1; 1]$ пересекает график этой функции в **единственной** точке, абсцисса x которой **обозначается** $\arcsin a$. Именно обозначается, потому что конкретное значение для конкретного a вычисляется, за редким исключением, по формулам высшей математики. Эти вычисленные с определенной степенью точности значения заложены в калькуляторах. Из определения $\arcsin a$ немедленно следуют

тождества: $\arcsin \sin x \equiv x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sin \arcsin a \equiv a, a \in [-1; 1].$$

Эти тождества, как и основное логарифмическое, относительные, потому что они имеют место не для всех x , а лишь для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и не для всех a , а лишь для $a \in [-1; 1]$.

Функция $y = \sin x, D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, т. е. строго монотонна на области определения, поэтому имеет обратную. Обратная функция тоже монотонно возрастает, ее графиком является кривая, симметричная $y = \sin x, D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно биссектрисы $y = x$ (рис. 9). Обычно независимую переменную обозначают x , а зависимую y . Поэтому более привычно записать $y = \arcsin x, D(y) = [-1; 1]$,

$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Аналогично определяются функции:

$y = \arccos x, D(\arccos x) = [-1; 1], E(\arccos x) = [0; \pi]$ (рис. 10).

$$y = \operatorname{arctg} x, D(\operatorname{arctg} x) = R, E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y = \operatorname{arcctg} x, D(\operatorname{arcctg} x) = R, E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi).$$

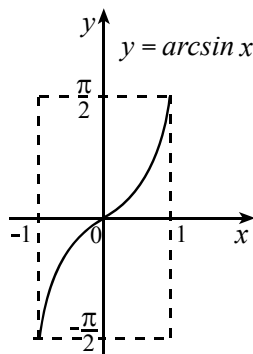


Рис. 9

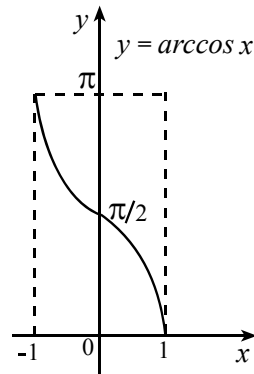
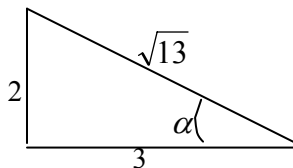


Рис. 10

Пример 16. Найдите значение выражения $2\sqrt{13} \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right)$.

♦ Многих учащихся задача ставит в тупик.

Так как $\frac{2}{3} > 0$, то $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ - это “угол” в треугольнике, тангенс которого равен $\frac{2}{3}$, т. е. противолежащий катет относится к прилежащему как 2:3. Построим треугольник с катетами 2 и 3.



По теореме Пифагора находим гипотенузу. Теперь находим

$$\cos \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow 2\sqrt{13} \cos \operatorname{arctg} \frac{2}{3} = 6 \Rightarrow \text{Ответ: } 6. \blacklozenge$$

Пример 17. (МИФИ). Найти наибольшее значение

$f(x) = \operatorname{arctg}(\sin 11x) + \operatorname{arcctg}(\sqrt{3} \cos 2x)$ и x , при которых оно достигается.

$$\blacklozenge \quad -1 \leq \sin 11x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(-1) \leq \operatorname{arctg}(\sin 11x) \leq \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$-\sqrt{3} \leq \sqrt{3} \cos 2x \leq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \operatorname{arcctg} \sqrt{3} \leq \operatorname{arcctg}(\sqrt{3} \cos 2x) \leq$$

$$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}.$$

Поэтому $-\frac{\pi}{12} \leq \operatorname{arctg}(\sin 11x) + \operatorname{arcctg}(\sqrt{3} \cos 2x) \leq \frac{13\pi}{12}$, при этом

$$f_{\max}(x) = \frac{13\pi}{12}, \text{ если } \begin{cases} \sin 11x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ \sin 11\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \equiv (-1)^{11k} \sin \frac{3\pi}{2} \equiv -(-1)^{11k} = 1 \Leftrightarrow k = 2n-1, n \in Z \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}, n \in Z \Rightarrow \text{Ответ: } f_{\max}(x) = f\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \frac{13\pi}{12}. \blacklozenge$$

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Элементарные тригонометрические уравнения

$$1. \quad \sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ \emptyset; \\ |a| \leq 1, \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z. \end{cases}$$

$$2. \cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ \emptyset; \\ |a| \leq 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$3. \operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 18. $\sin x = \frac{1 - \sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \emptyset$, т.к.

$$\frac{1 - \sqrt{10}}{2} = \frac{1 - 3, \dots}{2} = -1, \dots < -1.$$

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1. Во многих случаях тригонометрическое уравнение удается преобразовать к виду $f(\sin mx) = 0$ (или $f(\cos mx) = 0$, или $f(\operatorname{tg} x) = 0$). Затем надо решить уравнение $f(t) = 0$, где $t = \sin mx$, и для корней t_k , по модулю не больше 1, решить элементарные тригонометрические уравнения $\sin mx = t_k$.

Это заведомо можно сделать в следующих случаях.

$$F(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow F(1 - \cos^2 x, \cos^2 x, \cos x) = 0.$$

Например,

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \cos x = d \Leftrightarrow a(1 - \cos^2 x) + b \cos^2 x + c \cos x = d$$

$$\Leftrightarrow (b - a) \cos^2 x + c \cos x = d - a.$$

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x = d \Leftrightarrow a \sin^2 x + b(1 - \sin^2 x) + c \sin x = d$$

$$(a - b) \sin^2 x + c \sin x = d - b$$

2. Уравнение, однородное относительно $\cos kx, \sin mx$.

Уравнение $F(\sin mx, \cos kx) = 0$ называется однородным степени n относительно $\cos kx, \sin mx$, если

$$F(t \sin mx, t \cos kx) = t^n F(\sin mx, \cos kx).$$

Это уравнение приводится к уравнению с одним неизвестным заменой переменных $t = \frac{\cos kx}{\sin mx}$ (или $t = \frac{\sin mx}{\cos kx}$), где предварительно проверяется, не является ли решением $\sin mx = 0$ (или $\cos kx = 0$). Уравнение $a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin 2x = 0$ является однородным степени 2, т. к. $a(t \cos x)^2 + b(t \sin x)^2 + c2(t \sin x)(t \cos x) \equiv t^2(a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin 2x)$.

Пример 19. $2 \cos^2 x - 3 \cos x \cos 2x + \cos^2 2x = 0$.

$$\blacklozenge 2 \cos^2 x - 3 \cos x \cos 2x + \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1 \right) \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos 2x, \\ 2 \cos x = \cos 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ 2 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = k\pi, \\ \frac{x}{2} = n\pi, \\ \cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3}, \\ x = 2n\pi, \\ x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + 2\pi n, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

а) Однородное квадратное относительно $\cos x, \sin x$ уравнение

$$a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin 2x = 0.$$

Если коэффициент при $\cos^2 x$ отличен от 0, т. е. $a \neq 0$, то уравнение можно разделить на $\sin^2 x$: $a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin 2x = 0 \Leftrightarrow a \cos^2 x + b \sin^2 x + 2c \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow b \cdot \operatorname{ctg}^2 x + 2c \cdot \operatorname{ctg} x + a = 0$.

Если коэффициент при $\sin^2 x$ отличен от 0, т. е. $b \neq 0$, то уравнение можно разделить на $\cos^2 x$: $a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin 2x = 0 \Leftrightarrow a \cos^2 x + b \sin^2 x + 2c \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow b \cdot \operatorname{tg}^2 x + 2c \cdot \operatorname{tg} x + a = 0$.

б) Неоднородное квадратное относительно $\cos x, \sin x$ уравнение $a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x = d$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, заменим d выражением $d(\cos^2 x + \sin^2 x)$ и придем к уравнению предыдущего типа:

$$\begin{aligned} a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x &= d \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x &= d(\cos^2 x + \sin^2 x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a - d) \cos^2 x + (b - d) \sin^2 x + c \sin x \cos x &= 0. \end{aligned}$$

Например, если $b - d \neq 0$, то

$$\begin{aligned} a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \sin x \cos x &= d \equiv d(\cos^2 x + \sin^2 x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a - d) \cos^2 x + (b - d) \sin^2 x + c \sin x \cos x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (b - d) \operatorname{tg}^2 x + c \cdot \operatorname{tg} x + (a - d) &= 0. \end{aligned}$$

Пример 20 (МГУ, 1995, ф-т почв.) Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\cos 2y + 4a \cos y + 2a^2 + 1 = 0$ не имеет решений.

$$\begin{aligned} \diamond \cos 2y + 4a \cos y + 2a^2 + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 y - 1 + 4a \cos y + 2a^2 + 1 &\Leftrightarrow 2(\cos y + a)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos y = -a \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ y \in \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$. \diamond

Пример 21. (МГУ, 1991, химфак).

$$16 \cos^4 \frac{x}{4} + 6 \sin^2 \frac{x}{4} = 3 \cos \frac{x}{2} + 12 \cos^2 \frac{x}{4} \cos 3x.$$

$$\begin{aligned}
 & \blacklozenge 16 \cos^4 \frac{x}{4} + 6 \sin^2 \frac{x}{4} = 3 \cos \frac{x}{2} + 12 \cos^2 \frac{x}{4} \cos 3x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4 \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + 3 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) = 3 \cos \frac{x}{2} + 6 \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right) \cos 3x \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} (1 - 3 \cos 3x) + 7 - 6 \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{-1 + 3 \cos 3x \pm 3 \sqrt{(\cos 3x + 3)(\cos 3x - 1)}}{4} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 1, \\ \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n \Rightarrow \cos 3 \left(\pm \frac{2}{3} + 4n \right) \pi \equiv 1, n \in Z. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z.$ \blacklozenge

3. Уравнение вида $\sin ax + \cos bx = 0$ (аналогично $\operatorname{tg} ax + \operatorname{ctg} bx = 0$)

$$\begin{aligned}
 & \sin ax + \cos bx = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sin ax + \sin \left(\frac{\pi}{2} - bx \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{(a-b)x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cos \left(\frac{(a+b)x - \frac{\pi}{2}}{2} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Пример 22. $\blacklozenge \sin 7x - \cos 19x = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \sin 7x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - 19x \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \left(13x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 6x \right) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(13x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{\pi}{4} + k\pi}{13}, \\ \cos \left(6x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\pi}{4}}{6}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{52} + \frac{k\pi}{13}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi(4k+1)}{24}, k \in Z. \blacklozenge$

4. Уравнения вида $a \sin \alpha x + b \cos \alpha x = 0$.

Если $a \neq 0$, то $ab \neq 0$.

$a \sin \alpha x + b \cos \alpha x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha x = -\frac{b}{a}$, т.к. уравнение при $\cos \alpha x = 0$ не имеет решений.

Пример 23. $4 \sin 3x - 7 \cos 3x = 0$.

$\blacklozenge 4 \sin 3x - 7 \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 3x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\operatorname{arctg} \frac{7}{4} + k\pi}{3}$.

Ответ: $x = \frac{\operatorname{arctg} \frac{7}{4} + k\pi}{3}. \blacklozenge$

5. Уравнения вида $\sin x + \cos x = a$

Первый способ.

$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = a \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{a}{\sqrt{2}} \right| \leq 1, \\ x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} + 2k\pi, k \in Z. \end{cases}$

Второй способ.

$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow$

$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = a \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)\cos^2 \frac{x}{2} + (a+1)\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$ - однородное квадратное относительно $\cos \frac{x}{2}, \sin \frac{x}{2}$ уравнение.

Третий способ.

$$\sin x + \cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x) \cdot a \geq 0, \\ (\sin x + \cos x) = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)a \geq 0, \\ 2\sin x \cos x = a^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

6. Разложение на множители. Это самый распространенный метод решения тригонометрических уравнений.

а) Применение формул тригонометрии.

Пример 24. (МГУ, 2001, биофак) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}$

$$\diamond \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \frac{1}{2} + \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x \cos x - \sin x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3} \cos x - \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k. \end{cases}$$

Ответ: $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k, n \in \mathbb{R}.$ \diamond

Применяя формулы тригонометрии, всегда надо помнить, что **не все формулы** тригонометрии являются тождествами.

Чтобы не пользоваться неравносильными переходами для тангенсов, лучше перейти сразу к синусам и косинусам.

б) Группировка слагаемых, применение формул (особенно часто используются формулы $\cos 2x$ в той или иной форме):

Пример 25. (МФТИ, 2001) Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x.$$

$$\diamond \frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x \cos x \sin 3x + \sin^2 x \sin x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos 2x)(\sin 4x + \sin 2x) + (1 - \cos 2x)(\sin 4x - \sin 2x)}{4 \cos 2x} =$$

$$= 3 \sin 2x \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 \sin 2x \cos 2x}{4 \cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0, \\ \sin 2x \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k. \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{k\pi}{2}, \\ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{k\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \diamond$$

Пример 26. (МФТИ, 2002) Решите уравнение

$$\frac{3 + \cos 4x - 8 \cos^4 x}{4(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x - 2(1 + \cos 2x)^2}{4(\cos x + \sin x)} \equiv$$

$$\equiv \frac{-4 \cos 2x}{4(\cos x + \sin x)} \equiv \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x \neq 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \sin^2 x - \sin x \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + \sin x) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. ♦

в) Преобразование произведения в сумму, а затем в новое произведение.

Пример 27. Решите уравнение $\cos 14x \cos 15x = \cos 16x \cos 17x$.

$$\diamond \cos 14x \cos 15x = \cos 16x \cos 17x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 29x + \cos x) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 33x + \cos x) \Leftrightarrow -2 \sin 31x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi n}{31}, \\ \frac{\pi n}{2}, n \in Z. \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $\frac{\pi n}{31}, \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. ♦

$$7. F(\sin 2x, (\sin x \pm \cos x)) = 0.$$

Так как $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$, то удобнее сделать замену переменной $t = \sin x - \cos x$. Тогда

$F(\sin 2x, \sin x - \cos x) \equiv F(1 - t^2, t) = 0$, т.е. получаем уравнение с одной переменной

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 &= 1 + \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1 \\ t = \sin x - \cos x &\Rightarrow F(\sin 2x, \sin x + \cos x) \equiv F(t^2 - 1, t) = 0 \end{aligned}$$

8. Уравнение $F(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x, \cos 2x) = 0$, всегда можно привести к виду $f(\cos 2x) = 0$

9. Универсальная подстановка $t = tg \frac{x}{2}$, которая приводит уравнение

$F(\sin x, \cos x) = 0$ к уравнению с одним переменным.

$$F(\sin x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow F\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ F\left(0, -\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 0; \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{x}{2} \neq 0, \\ F\left(\cos^2 \frac{x}{2} \cdot 2\operatorname{tg} \frac{x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow F\left(\frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = 0. \end{array} \right.$$

10. Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$, $ab \neq 0$. Введение вспомогательного угла

Уравнение $a \sin x + b \cos x = c$ можно решить с помощью универсальной тригонометрической подстановки: $a \sin x + b \cos x = c \Leftrightarrow$

$$2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = c \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + (b - c) \cos^2 \frac{x}{2} - (b + c) \sin^2 \frac{x}{2} = 0 - \text{однородное уравнение степени 2.}$$

Но в некоторых задачах такая замена не очень удачна.

Рассмотрим выражение $a \sin x + b \cos x$, умножим и разделим его на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$y(x) = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right).$$

Заметим, что

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Поэтому точки с координатами

$$\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\left(\pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\left(\pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \mp \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\left(\pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \mp \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

принадлежат единичной окружности (все-

го восемь точек), и каждая пара координат может быть принята за косинус и синус соответствующего угла.

При этом всегда найдутся две пары положительных чисел, а, значит, угол в первой четверти, который может быть записан в виде любого "арка".

При необходимости или желании можно выбрать любую пару, преобразовав соответственно заданное выражение.

Положим, например,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha.$$

Тогда заданное выражение $y(x) = a \sin x + b \cos x$ примет вид $y(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$, т. к.

$$y(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) \equiv \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + x).$$

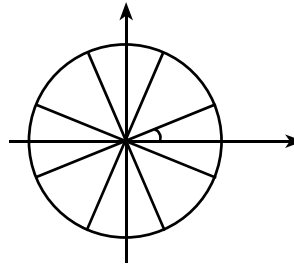
Уравнение $a \sin x + b \cos x = c$ примет **простейший вид**

$$\sin(\alpha + x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример 29. (МИФИ) Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a \sin 3x + \sqrt{3(1-a)} \cos 3x = 2a - 3$ имеет ровно три решения на отрезке $[-\pi; \pi]$.

♦ ОДЗ: $a \leq 1$.

$$a \sin 3x + \sqrt{3(1-a)} \cos 3x = 2a - 3 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} \sin 3x + \frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} \cos 3x = \frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x + \alpha) = \frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}},$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}.$$

Функция $f(x) = \sin(3x + \alpha)$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, поэтому ровно три

решения на отрезке $[-\pi; \pi]$ может быть только тогда, если

$$\frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} = \pm 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{a^2 - 3a + 3} = 2a - 3 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases} \Rightarrow a = 1, \text{ и это значение не принимается ни на одном из}$$

концов отрезка $[-\pi; \pi]$. Проверим это.

$$a = 1: a \sin 3x + \sqrt{3(1-a)} \cos 3x = 2a - 3 \Leftrightarrow$$

$$\sin 3x = -1 \Rightarrow \sin(-3\pi) = \sin 3\pi = 0 \neq \pm 1.$$

Ответ: 1. ♦

11. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Пример 30. (МФТИ, 2001) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 4|\sin x|$.

♦ ОДЗ: $\cos x \cos 3x \neq 0$.

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} = \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 3x} = 4|\sin x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos 2x = |\sin x| \cos 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x(\cos 2x - \cos 3x) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, \\ \sin x \geq 0, \\ \cos 2x - \cos 3x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos 2x + \cos 3x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi k, \\ \sin x \geq 0, \\ \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi k}{5}, \\ 2\pi k; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \sin x < 0, \\ \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi(2n+1)}{5}, \\ \pi(2k+1). \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{5} : \cos \frac{2\pi k}{5} \neq 0, \cos \frac{6\pi k}{5} \neq 0, \sin \frac{2\pi k}{5} \geq 0 \Rightarrow k = \begin{cases} 5n, \\ 5n+1, \\ 5n+2. \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi(2n+1)}{5} : \cos \frac{\pi(2n+1)}{5} \neq 0 \Rightarrow \cos \frac{6\pi(2n+1)}{5} \neq 0, \sin \frac{\pi(2n+1)}{5} =$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5} \right) < 0 \Rightarrow n = \begin{cases} 5k+3, \\ 5k+4. \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \pi k, \\ \frac{2\pi}{5} + 2\pi k, \\ \frac{4\pi}{5} + 2\pi k, \\ \frac{7\pi}{5} + 2\pi k, \\ \frac{9\pi}{5} + 2\pi k. \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \pi k, \\ \frac{2\pi}{5} + \pi k, \\ \frac{4\pi}{5} + \pi k. \end{cases}$$

Ответ: $\pi k, \frac{2\pi}{5} + \pi k, \frac{4\pi}{5} + \pi k, k \in Z$. ♦

12. Нестандартные уравнения

Пример 31. Решите уравнение $\sin^8 x - \cos^5 x = 1$.

$$\begin{aligned} & \diamond \sin^8 x - \cos^5 x = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sin^8 x - \cos^5 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin^6 x) + \cos^2 x(1 + \cos^3 x) = 0 \Leftrightarrow . \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sin^2 x = 0, \\ \cos^2 x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset; \\ \begin{cases} \sin^2 x = 0, \\ 1 + \cos^3 x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi(2n + 1), n \in Z; \\ \begin{cases} \sin^6 x = 1, \\ \cos^2 x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \\ \begin{cases} \sin^6 x = 1, \\ \cos^3 x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset. \end{cases}$$

Ответ: $\pi(2n + 1), \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. ♦

Контрольные вопросы

1(3). Определите, является ли заданная функция четной, нечетной или функцией общего вида.

а) $y = 7x^8 - 5|x|$;

б) $y = \sqrt{1+7x}$;

в) $y = \frac{3x^3}{x^8 - 1}$.

2(3). (МГУ, 2000, ф-т почвоведения) Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 1, такая, что $f(x) = x^2$ при $x \in [0;1]$. Решите уравнение $f(2x+5) + 2f(x) = 1$.

3(3). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 4 \sin 7x - 11 \cos 7x + 13.$$

4(2). Решите уравнение $\sin^2 2x = \cos 2x$.

5(2). Решите уравнение $\cos 2x = \sin x$.

6(2). (МГУ, 2001, ф-т наук о материалах) Решите уравнение

$$3 \cos 2x - 6 \sin x - 2 = 0.$$

7(2). (МГУ, 1995, химфак) Решите уравнение $\cos 2x = 2(\cos x - \sin x)$.

8(2). (МГУ, 2000, химфак) Решите уравнение $\cos 5x + \sin x \cdot \sin 4x = 0$.

9(3). (МГУ, 2001, геогр. ф-т) Решите уравнение

$$|\cos x| - \sqrt{3} \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1.$$

10(3). (МГУ, 2005, почв.) Решите уравнение

$$\cos(\sqrt{2} \arcsin x) = 0.$$

11(3). (МГУ, 2001, химфак) Решите уравнение

$$\arcsin \frac{6x-7}{2x-1} = \pi(2-x).$$

12(3). Сравнить числа $\frac{2\pi}{5}$ и $\arccos \frac{3}{10}$.

Задачи

1(3). (МФТИ, 2002) Решите уравнение $\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{x} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

2(3). (МГУ, 2005, филфак) Решите уравнение

$$2 + \sin t = 3 \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

3(4). (МГУ, 1991, химфак) Решите уравнение

$$\frac{4}{3} \cos^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{4} \cos 2x + \cos^2 x \cos 12x.$$

4(3). (МГУ, 1994, химфак) Решите уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{3(\cos x + \sin x) - 3}.$$

5(3). Решить уравнение $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -9 \operatorname{ctg}^2 x - 1$.

6(2). Решите неравенство $\sin |x| \geq \left| \frac{2x}{\pi} \right|$.

7(4). Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

8(4). Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x \sin (x + y) = \frac{1}{2} \cos x, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

9(4). (МФТИ, 2001) Решите уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cdot \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \cdot \sin 3x = 6 \cos 2x \cdot \sin^2 x.$$

10(4). (МФТИ, 2001) Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

11(4). (МФТИ, 2005, март) Решите уравнение

$$(3 \sin x + 4 \cos x)(20 + 12 \sin x + 5 \cos 2x) = 143.$$

12(4). (МГУ, 2006, мехмат) Решите уравнение

$$|1 - 2 \sin x + \cos x| + 2 \sin x + 1 = \cos 2x.$$