

МАТЕМАТИКА

Квадратные корни

Задание №3 для 8-х классов

(2006-2007 учебный год)

Введение

Дорогие ребята!

Вы получили очередное задание по математике. В этом задании мы знакомим вас с важным математическим понятием – арифметическим корнем. Постарайтесь хорошо справиться с этим заданием. Оно подготовит вас к решению следующего задания, в котором мы рассмотрим квадратные уравнения.

§1. Определение арифметического квадратного корня

Рассмотрим простейшую задачу. Пусть площадь квадрата равна 25. Требуется определить сторону квадрата. Если сторона квадрата равна x , то для нахождения длин сторон квадрата получаем уравнение $x^2 = 25$. Этому уравнению удовлетворяют два числа: 5 и -5 . Эти числа называют квадратными корнями числа 25. Заметим, что один корень является положительным, а второй корень является отрицательным числом.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Обозначают арифметический квадратный корень так: \sqrt{a} .

Например, $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{1,44} = 1,2$; $\sqrt{0} = 0$.

Равенство $\sqrt{a} = b$ является верным, если выполняются два условия: 1) $b \geq 0$ и 2) $b^2 = a$.

При $a < 0$ выражение \sqrt{a} не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа – число неотрицательное. Поэтому выражения $\sqrt{-49}$ и $\sqrt{-3,5}$ не имеют смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если \sqrt{a} имеет смысл, то $(\sqrt{a})^2 = a$ и $\sqrt{a^2} = |a|$.

Докажем, что, действительно, $\sqrt{a^2} = |a|$. Если $a \geq 0$, то из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{a^2} = |a|$.

Если же $a < 0$, то $-a > 0$ и $(-a)^2 = a^2$. Таким образом, арифметический корень $\sqrt{a^2}$ равен a , если $a \geq 0$ и равен $(-a)$, если $a < 0$, т. е. $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{12,25} - 0,1 \cdot \sqrt{0,25}$; б) $\sqrt{(-9)^2}$; в) $\sqrt{-16,2}$.

а) Из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{12,25} = 3,5$, т. к. $3,5 > 0$ и $3,5^2 = 12,25$; $\sqrt{0,25} = 0,5$, т. к. $0,5 > 0$ и $0,5^2 = 0,25$. Получаем: $2 \cdot 3,5 - 0,1 \cdot 0,5 = 7 - 0,05 = 6,95$.

б) $\sqrt{(-9)^2} = 9$, т. к. $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$.

в) Данное выражение не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа является неотрицательным числом.

Пример 2. При каких x имеет смысл выражение:

а) $\frac{3x}{\sqrt{x-1}}$; б) $\frac{2x+1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}$?

а) Выражение $\sqrt{x-1}$ определено, если $x-1 \geq 0$, т. е. при $x \geq 1$. Но так как $\sqrt{x-1}$ стоит в знаменателе, то данное выражение определено, если $x > 1$.

б) Выражение \sqrt{x} определено при $x \geq 0$, а выражение $\sqrt{x+2}$ определено при $x+2 \geq 0$, $x \geq -2$. Таким образом, при $x \geq 0$ определены оба корня. При таких x имеем: $\sqrt{x} \geq 0$ и $\sqrt{x+2} > 0$, поэтому знаменатель при $x \geq 0$ не обращается в нуль, значит, при $x \geq 0$ данное выражение имеет смысл.

Пример 3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} + 2 = 0$, б) $\sqrt{x} - 3 = 0$, в) $\sqrt{5x+6} = 6$, г) $\sqrt{3x-7} = -5$.

а) Арифметический корень \sqrt{x} определен при $x \geq 0$, при этом $\sqrt{x} \geq 0$, значит, при любом $x \geq 0$ выражение $\sqrt{x} + 2 \geq 2$, поэтому данное уравнение не имеет решений.

б) $\sqrt{x} = 3$, из определения арифметического корня следует, что $(\sqrt{x})^2 = x = 9$, т. е. $x = 9$ является корнем уравнения.

в) Предположим, что данное уравнение имеет решение, тогда $(\sqrt{5x+6})^2 = 5x+6 = 6^2$. Отсюда уже видно, что $5x+6 > 0$, т. е. выражение $\sqrt{5x+6}$ определено. Решаем уравнение: $5x+6 = 36$, $5x = 30$, $x = 6$.

г) Уравнение не имеет смысла, т. к. арифметический корень из неотрицательного числа – число неотрицательное, а число $-5 < 0$.

§2. Уравнение $x^2 = a$

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет решений. Если $a = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = 0$. Рассмотрим теперь уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$.

Рассмотрим графики функций $y = x^2$ и $y = a$. Если $a = 1$, то уравнение $x^2 = 1$ имеет два корня: 1 и -1 . Если $a = 4$, то уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня: 2 и -2 . Один из корней совпадает с арифметическим корнем из числа 4, а второй корень – число, противоположное первому корню.

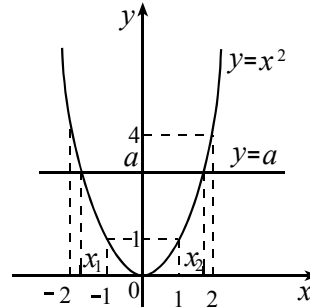


Рис. 1

Рассмотрим теперь уравнение $x^2 = 2$.

В первом задании мы уже говорили о том, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. Арифметический корень $\sqrt{2}$ является числом иррациональным.

Пример 1. Докажите, что число $\sqrt{7}$ является числом иррациональным.

△ Предположим, что $\sqrt{7}$ является числом рациональным, т. е. $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$, где n – натуральное число, m – целое число, и дробь $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Из определения арифметического корня следует, что m должно также быть натуральным числом. Тогда

$$(\sqrt{7})^2 = 7 = \frac{m^2}{n^2}, \quad 7n^2 = m^2.$$

Левая часть полученного выражения делится на 7, тогда и m^2 делится на 7, т. е. m делится на 7, тогда $m = 7k$, $7n^2 = 49k^2$, $n^2 = 7k^2$. Отсюда следует, что и число n делится на 7, но тогда дробь $\frac{m}{n}$ является сократимой дробью, что противоречит условию. Следовательно, число $\sqrt{7}$ является иррациональным. ▲

Из рисунка 1 следует, что если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Поэтому, например, $\sqrt{119} > \sqrt{80}$; $\sqrt{2,37} > \sqrt{1,5}$.

Пример 2. Сравните числа $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \frac{1}{2}\sqrt{47}$.

△ Из определения арифметического корня следует, что $a^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $b^2 = \frac{1}{4} \cdot 47 = 11\frac{3}{4}$. Так как $12 > 11\frac{3}{4}$, то число $a > b$. ▲

Пример 3. Найдите значение выражения:

$$(-\sqrt{3})^2 - 5(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}.$$

$$\triangle (-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3; \quad 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2(\sqrt{3})^2 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Получаем: $3 - 5 \cdot 3 + 6 = -6$. ▲

Пример 4. Между какими соседними натуральными числами расположено число $a = \frac{1}{3}\sqrt{209}$.

$$\triangle a^2 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{209}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 209 = 23\frac{2}{9}. \text{ Заметим, что } 16 < 23\frac{2}{9} < 25,$$

поэтому $\sqrt{16} < a < \sqrt{25}$, т. е. $4 < a < 5$. ▲

§3. Свойства арифметического квадратного корня

В школьном учебнике у вас доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Теорема 2. Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пример 1. Найдите значение выражения (без микрокалькулятора):

а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175}$; б) $\sqrt{5 \frac{11}{49}}$; в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}}$;

г) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$; д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4}$.

△ а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175} = \sqrt{175 \cdot 175} = 175$.

б) $\sqrt{5 \frac{11}{49}} = \sqrt{\frac{256}{49}} = \frac{16}{7}$.

в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}} = \sqrt{\frac{75}{192}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$.

$$\begin{aligned} \text{г) } \sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}} &= \sqrt{\frac{(149 - 76)(149 + 76)}{(457 - 384)(457 + 384)}} = \sqrt{\frac{73 \cdot 225}{73 \cdot 841}} = \\ &= \sqrt{\frac{225}{841}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}} = \frac{15}{29}. \end{aligned}$$

$$\text{д) } \sqrt{16^3 \cdot 4^4} = \sqrt{(4^2)^3 \cdot 4^4} = \sqrt{4^6 \cdot 4^4} = \sqrt{4^{10}} = \sqrt{(4^5)^2} = 4^5.$$

Можно решать и другим способом.

$$\begin{aligned} \sqrt{16^3 \cdot 4^4} &= \sqrt{16^2 \cdot 16 \cdot 4^4} = \sqrt{16^2} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{(4^2)^2} = 16 \cdot 4 \cdot 4^2 = \\ &= 4^2 \cdot 4 \cdot 4^2 = 4^5. \blacktriangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } \sqrt{48}. \text{ Преобразуем это выражение: } \sqrt{48} &= \sqrt{16 \cdot 3} = \\ &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

В этом случае мы говорим, что множитель 4 вынесли из под знака корня.

Теперь рассмотрим выражение $5\sqrt{7}$, преобразуем его:

$$5\sqrt{7} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}.$$

В этом случае говорим, что множитель 5 внесли под знак корня.

Пример 2. Вынесите множитель из под знака корня:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{(5\sqrt{13} - 4\sqrt{19})^2}; \quad \text{б) } \sqrt{(\sqrt{17} - \sqrt{11})^3 (\sqrt{3} - \sqrt{5})^5}; \\ \text{в) } -\sqrt{-a^4 b^{11}}; \quad \text{г) } \sqrt{21(xy)^2}, \text{ если } xy \leq 0. \end{aligned}$$

$$\Delta \text{ Так как } \sqrt{a^2} = |a|, \text{ то } \sqrt{(5\sqrt{13} - 4\sqrt{19})^2} = |5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}|.$$

Определим знак числа $5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}$. Числа $5\sqrt{13}$ и $4\sqrt{19}$ – положительные. Рассмотрим их квадраты: $(5\sqrt{13})^2 = 25 \cdot 13 = 325$ и $(4\sqrt{19})^2 = 16 \cdot 19 = 304$. Так как $304 < 325$, то $\sqrt{304} < \sqrt{325}$, т. е. $5\sqrt{13} > 4\sqrt{19}$, поэтому $|5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}| = 5\sqrt{13} - 4\sqrt{19}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11})^3 (\sqrt{3} - \sqrt{5})^5} &= \\ &= \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11})^2 (\sqrt{7} - \sqrt{11}) (\sqrt{3} - \sqrt{5})^4 (\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \\ &= |\sqrt{7} - \sqrt{11}| (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11}) (\sqrt{3} - \sqrt{5})}. \end{aligned}$$

Число $\sqrt{7} < \sqrt{11}$, т. к. $(\sqrt{7})^2 = 7$, $(\sqrt{11})^2 = 11$ и $7 < 11$. Поэтому

$$\sqrt{7} - \sqrt{11} < 0, \text{ т. е. } |\sqrt{7} - \sqrt{11}| = \sqrt{11} - \sqrt{7}.$$

Окончательно получаем: $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{11})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$.

в) Так как $a^4 \geq 0$, то корень определен, если $-b^{11} \geq 0$, т. е. $b^{11} \leq 0, b \leq 0$.

$$-\sqrt{a^4(-b^5)^2(-b)} = -a^2(-b^5)\sqrt{-b} = a^2b^5\sqrt{-b}.$$

$$\text{г) } \sqrt{21(xy)^2} = |xy|\sqrt{21} = -xy\sqrt{21}. \blacktriangle$$

Пример 3. Внесите множитель под знак корня:

$$\text{а) } (5 - \sqrt{37})\sqrt{\sqrt{2} + 3}; \text{ б) } (2a - 1)\sqrt{1 - 2a}; \text{ в) } -3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}.$$

Δ При решении этих примеров используем формулу $\sqrt{a^2} = |a|$.

а) Число $5 - \sqrt{37} < 0$, т. к. $5^2 = 25$, $(\sqrt{37})^2 = 37$ и $25 < 37$.

Поэтому $(5 - \sqrt{37})\sqrt{\sqrt{2} + 3} = -(\sqrt{37} - 5)\sqrt{\sqrt{2} + 3} = -\sqrt{(\sqrt{37} - 5)^2(\sqrt{2} + 3)}$.

б) Корень $\sqrt{1 - 2a}$ определен, если $1 - 2a \geq 0, 2a \leq 1, a \leq \frac{1}{2}$. При

таких a выражение $2a - 1 \leq 0$. Поэтому

$$(2a - 1)\sqrt{1 - 2a} = -(1 - 2a)\sqrt{1 - 2a} = -\sqrt{(1 - 2a)^2(1 - 2a)} = -\sqrt{(1 - 2a)^3}.$$

в) Корень $\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}$ определен, если $xy < 0$. Поэтому

$$-3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = 3(-xy)\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = \sqrt{9(-xy)^2\left(-\frac{1}{(xy)^3}\right)} = \sqrt{\frac{-9}{xy}}.$$

Пример 4. Сравните числа a и b :

$$\text{а) } a = \sqrt{3} + \sqrt{11} \text{ и } b = \sqrt{6} + \sqrt{8};$$

$$\text{б) } a = 2 - \sqrt{3} \text{ и } b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}};$$

$$\text{в) } a = \frac{2}{5 + 3\sqrt{3}} - \frac{2}{5 - 3\sqrt{3}} \text{ и } b = \sqrt{110}.$$

Δ а) Числа a и b положительные. Рассмотрим квадраты этих чисел. Имеем: $a^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{11} + 11 = 14 + 2\sqrt{33}$, $b^2 = 6 + 2\sqrt{6}\sqrt{8} + 8 = 14 + 2\sqrt{48}$. Так как $48 > 33$, то $\sqrt{48} > \sqrt{33}$, $2\sqrt{48} > 2\sqrt{33}$, поэтому $b^2 > a^2$ и $b > a$.

б) Число $a > 0$, т. к. $2^2 > (\sqrt{3})^2 = 3$. Число $7 - 4\sqrt{3} > 0$, т. к. $7^2 > (4\sqrt{3})^2 = 48$. Число b определено и оно больше нуля.

Следовательно, оба числа a и b положительные. Рассмотрим их квадраты. $a^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$, $b^2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Следовательно, $a = b$.

$$\text{в) } a = \frac{2}{5 + 3\sqrt{3}} - \frac{2}{5 - 3\sqrt{3}}.$$

Приводим дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{10 - 6\sqrt{3} - 10 - 6\sqrt{3}}{(5 + 3\sqrt{3})(5 - 3\sqrt{3})} = \frac{-12\sqrt{3}}{-2} = 6\sqrt{3} = \sqrt{108}.$$

Так как $110 > 108$, то $\sqrt{110} > \sqrt{108}$, поэтому $b > a$.

Пример 5. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\text{а) } \frac{2}{3\sqrt{5} - \sqrt{7}}; \quad \text{б) } \frac{1 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2} + \sqrt{5}}.$$

Δ Эту задачу надо понимать так: следует так преобразовать дробь, чтобы в знаменателе отсутствовали квадратные корни.

При решении этих задач полезно использовать формулу

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

а) Умножим числитель и знаменатель дроби на $3\sqrt{5} + \sqrt{7}$, получаем:

$$\frac{2(3\sqrt{5} + \sqrt{7})}{(3\sqrt{5} - \sqrt{7})(3\sqrt{5} + \sqrt{7})} = \frac{6\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{(3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{6\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{45 - 7} = \frac{3\sqrt{5} + \sqrt{7}}{19}.$$

б) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение

$$(3 - \sqrt{2}) - \sqrt{5}, \text{ получаем: } \frac{(1 + \sqrt{2})((3 - \sqrt{2}) - \sqrt{5})}{((3 - \sqrt{2}) + \sqrt{5})((3 - \sqrt{2}) - \sqrt{5})} =$$

$$= \frac{3 - \sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 2 - \sqrt{10}}{(9 + 2 - 6\sqrt{2}) - 5} = \frac{1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{10}}{6(1 - \sqrt{2})}.$$

В полученной дроби умножаем числитель и знаменатель на $1 + \sqrt{2}$,
получаем: $\frac{(1 + \sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{10})}{6(1 - 2)} =$

$$= -\frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 - \sqrt{5} - \sqrt{10} - \sqrt{10} - \sqrt{20}}{6} =$$

$$= -\frac{5 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{10}}{6}. \blacktriangle$$

§4. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Покажем на примере, как можно тождественными преобразованиями упрощать выражения, содержащие квадратные корни. При этом мы будем пользоваться правилами, которые указали в предыдущем параграфе, как, например, правило произведения корней, правило деления корней, правило вынесения множителя из-под знака корня и т. д.

Пример 1. Упростите выражение $5\sqrt{18} + 7\sqrt{50} - 30\sqrt{2}$.

Δ Заметим, что $5\sqrt{18} = 5\sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{9}\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ и $7\sqrt{50} = 7\sqrt{25 \cdot 2} = 7\sqrt{25}\sqrt{2} = 35\sqrt{2}$.

В итоге получаем $15\sqrt{2} + 35\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$. \blacktriangle

Пример 2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{a + 1 + 4\sqrt{a - 3}}$.

Δ а) Заметим, что $7 = 4 + 3 = 2^2 + (\sqrt{3})^2$, тогда

$$7 + 4\sqrt{3} = 2^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2. \text{ Поэтому}$$

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{б) } \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} =$$

$$= |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{в) } \sqrt{a + 1 + 4\sqrt{a - 3}} = \sqrt{(a - 3) + 4 + 4\sqrt{a - 3}} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{a-3})^2 + 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{a-3}} = \sqrt{(\sqrt{a-3} + 2)^2} = \sqrt{a-3} + 2. \blacktriangle$$

Пример 3. Сократите дроби:

$$\text{а) } \frac{a-b}{\sqrt{7a}-\sqrt{7b}}; \text{ б) } \frac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}; \text{ в) } \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}; \text{ г) } \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Δ а) Заметим, что

$$a-b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2, \sqrt{7a} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{a}, \sqrt{7b} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{b},$$

подставляем эти выражения в данную дробь:

$$\frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{7}\sqrt{a} - \sqrt{7}\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{7}(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{7}}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}} &= \frac{(8\sqrt{a})^2 - (7\sqrt{b})^2}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}} = \frac{(8\sqrt{a}-7\sqrt{b})(8\sqrt{a}+7\sqrt{b})}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}} = \\ &= 8\sqrt{a} + 7\sqrt{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{3y}}{3x + 3y + 6\sqrt{xy}} &= \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{3y}}{(\sqrt{3x})^2 + (\sqrt{3y})^2 + 2 \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{3y}} = \\ &= \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{3y}}{(\sqrt{3x} + \sqrt{3y})^2} = \frac{1}{\sqrt{3x} + \sqrt{3y}}. \end{aligned}$$

г) Преобразуем числитель дроби:

$$\begin{aligned} a\sqrt{a} - b\sqrt{b} &= (\sqrt{a})^2 \sqrt{a} - (\sqrt{b})^2 \sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3 = \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \left((\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \right) = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) (a + b + \sqrt{ab}). \end{aligned}$$

$$\text{В результате получаем: } \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + b + \sqrt{ab})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a + b + \sqrt{ab}. \blacktriangle$$

Пример 4. Докажите тождество:

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{n - \sqrt{mn}} + \frac{\sqrt{n}}{m - \sqrt{mn}} \right) \cdot \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = -1.$$

Δ Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{\sqrt{m}}{n - \sqrt{mn}} + \frac{\sqrt{n}}{m - \sqrt{mn}} = \frac{\sqrt{m}}{(\sqrt{n})^2 - \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{m})^2 - \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{m})} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(\sqrt{m}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{m})} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(\sqrt{n}-\sqrt{m})} = \\
&= \frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} - \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{m} \cdot (\sqrt{n}-\sqrt{m})} = \frac{(\sqrt{m})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{m} \cdot (\sqrt{n}-\sqrt{m})} = \\
&= \frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{m} \cdot (\sqrt{n}-\sqrt{m})} = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{-\sqrt{nm}}. \text{ Тожество доказано. } \blacktriangle
\end{aligned}$$

Пример 5. Решите уравнение.

$\sqrt{4x^2+16x+16} - \sqrt{x^2-6x+9} = 4$. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4x^2+16x+16} - \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{4(x^2+4x+4)} - \sqrt{(x-3)^2} = \\
&= \sqrt{4} \cdot \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-3)^2} = 2|x+2| - |x-3|. \text{ После тождественных преобразований получили уравнение } 2|x+2| - |x-3| = 4.
\end{aligned}$$

1) Пусть $x \geq 3$, тогда $|x-3| = x-3$, $|x+2| = x+2$, наше уравнение сводится к уравнению

$$2(x+2) - (x-3) = 4; 2x+4-x+3=4; x+3=0; x=-3,$$

но это число меньше 3.

2) Пусть теперь $-2 < x < 3$, тогда $|x-3| = 3-x$, $|x+2| = x+2$, получаем уравнение: $2x+4+x-3=4$, $3x=3$, $x=1$. Число 1 удовлетворяет условию $-2 < 1 < 3$.

3) Пусть $x \leq -2$, тогда $|x-3| = 3-x$, $|x+2| = -x-2$, приходим к уравнению: $-2x-4-3+x=4$, $-x=11$, $x=-11$. Число $-11 < -2$.

Ответ: 1; -11. \blacktriangle

Пример 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\sqrt{x+3} - 2\sqrt{y-2} = 3, \\ 2\sqrt{x+3} + \sqrt{y-2} = 9. \end{cases}$$

Корень $\sqrt{x+3}$ определен при $x \geq -3$, а корень $\sqrt{y-2}$ определен при $y \geq 2$.

Умножим второе уравнение системы на 2 и прибавим к первому уравнению, получаем: $7\sqrt{x+3} = 21$, $\sqrt{x+3} = 3$, $x+3=9$, $x=6$.

Подставляем это значение для x в первое уравнение, получаем:

$$3 \cdot 3 - 2\sqrt{y-2} = 3; 6 = 2\sqrt{y-2}; \sqrt{y-2} = 3; y-2 = 9; y = 11.$$

Ответ: (6;11). ▲

§5. Преобразование двойных радикалов

Выражения вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ называют сложными или двойными радикалами. Мы уже рассматривали примеры, где можно избавиться от внешних радикалов.

Пример 1. Освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{23+4\sqrt{15}}$.

$$\nabla \text{ Заметим, что выражение } 23+4\sqrt{15} = 20+3+2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \\ = (2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2, \text{ тогда } \sqrt{23+4\sqrt{15}} = \sqrt{(2\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = |2\sqrt{5} + 3| = 2\sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

Пример 2. Освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{124-70\sqrt{3}}$.

В этом примере укажем метод, как можно избавляться от внешнего радикала. Подберем целые числа a и b такие, чтобы $\sqrt{124-70\sqrt{3}} = a-b\sqrt{3}$. Если такие числа есть, то должны выполняться такие условия:

$$\begin{cases} (a-b\sqrt{3})^2 = 124-70\sqrt{3}, \\ a-b\sqrt{3} \geq 0. \end{cases}$$

Из первого условия получаем

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab\sqrt{3} + 3b^2 &= 124 - 70\sqrt{3}, \\ a^2 + 3b^2 - 124 &= 2ab\sqrt{3} - 70\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Выражение $a^2 + 3b^2 - 124$ является целым числом, т. к. a и b – целые числа, значит левая часть, т. е. $a^2 + 3b^2 - 124$ является рациональным числом; выражение $(2ab-70)\sqrt{3}$ является рациональным выражением, если $2ab-70=0$, т. е. $ab=35$. Уравнению $ab=35$ удовлетворяют следующие пары чисел: $a=1, b=35$; $a=5, b=7$; $a=7, b=5$; $a=35, b=1$; $a=-1, b=-35$; $a=-5, b=-7$; $a=-7, b=-5$; $a=-35, b=-1$.

Условию $a^2 + 3b^2 - 124 = 0$ удовлетворяют две пары чисел: $a=7, b=5$ и $a=-7, b=-5$. Число $7-5\sqrt{3}$ не удовлетворяет

условию $a - b\sqrt{3} \geq 0$, а число $-7 + 5\sqrt{3}$ удовлетворяет этому условию. Таким образом, $\sqrt{124 - 70\sqrt{3}} = -7 + 5\sqrt{3}$. ▲

В некоторых примерах удается избавиться от внешнего радикала, если воспользоваться тождеством

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Это тождество называют формулой двойного радикала. Оно справедливо, если $a > 0, b > 0$ и $a^2 - b > 0$. Тогда все три корня

определены и $\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} > \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, поэтому правая часть равенства положительная. Возведем в квадрат обе части равенства, получаем:

$$a \pm \sqrt{b} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a^2 - a^2 + b}{4}},$$

$$a \pm b = a \pm \sqrt{b}.$$

Пример 2. Освободитесь от внешнего радикала в выражении

$$\sqrt{56 - \sqrt{2880}},$$

применяя тождество двойного радикала.

$$\begin{aligned} \Delta \sqrt{56 - \sqrt{2880}} &= \sqrt{\frac{56 + \sqrt{3136 - 2880}}{2}} - \sqrt{\frac{56 - \sqrt{3136 - 2880}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{56 + 16}{2}} - \sqrt{\frac{56 - 16}{2}} = 6 - \sqrt{20} = 6 - 2\sqrt{5}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

§6. Построение графиков функций

В школьном курсе 7-го класса вы уже рассматривали график линейной функции $y = kx + b$, графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$. В этом году вы познакомились с еще одной функцией, а именно, с функцией $y = \sqrt{x}$.

Составим таблицу значений этой функции, очевидно, что функция определена при $x \geq 0$.

x	0	1/16	1/9	1/4	1	4	9
y	0	1/4	1/3	1/2	1	2	3

Построим график этой функции.

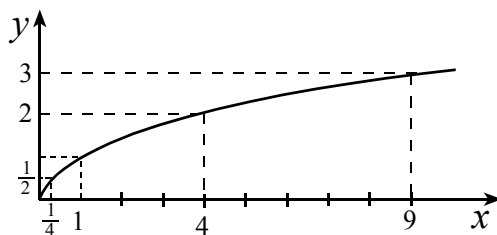


Рис. 1

Пример 1. Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt{x^2}$; б) $y = -\sqrt{-x}$; в) $y = \sqrt{x+1}$; г) $y = \sqrt{|x+1|}$;

д) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$; е) $y = (-\sqrt{x})^2$.

Δ а) Из определения арифметического корня следует, что

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График данной функции приведен на рис. 2.

б) Из определения корня следует, что $-x \geq 0$, т. е. $x \leq 0$. Составим таблицу значений функции.

x	0	-1/16	-1/4	-1	-4	-9
y	0	-1/4	-1/2	-1	-2	-3

График функции изображен на рис. 3.

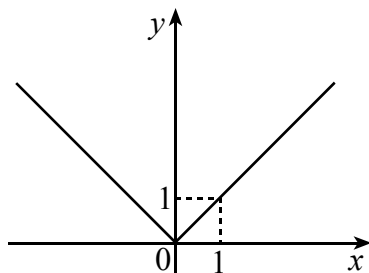


Рис. 2

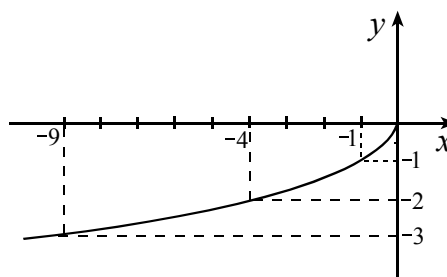


Рис. 3

в) Данная функция определена при $x+1 \geq 0$, $x \geq -1$. При $x = -1$, $y = 0$, при $x = 3$, $y = 2$, при $x = 8$, $y = 3$. График данной функции получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ параллельным сдвигом вдоль оси Ox на одну единицу влево. Приводим график данной функции на рис. 4.

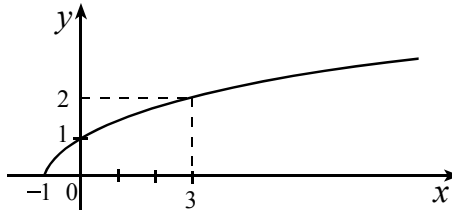


Рис. 4

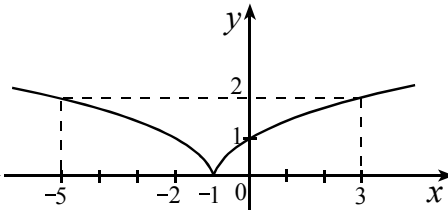


Рис. 5

г) Данная функция определена при всех x . При $x \geq -1$ выражение $|x+1| = x+1$, поэтому график данной функции совпадает с графиком функции $y = \sqrt{x+1}$, который мы привели на рис. 4. При $x \leq -1$ данная функция определена, при этом $y = \sqrt{-x-1}$. Заметим, что данная функция в точках, симметричных относительно точки (-1) , принимает равные значения. Например, при $x=0$ и $x=-2$ значения функции совпадают и равны 1. В точках 3 и (-5) значения функции также совпадают и равны 2. Про график данной функции говорят так: график функции симметричен относительно прямой $x = -1$. График данной функции приведен на рис. 5.

д) Преобразуем выражение, которым задается наша функция.

$$y = \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x+1)^2} = |x-2| - |x+1|.$$

При $x \geq 2$ $y = x-2-x-1 = -3$.

При $-1 < x < 2$ $y = -x+2-x-1 = -2x+1$.

При $x \leq -1$ $y = -x+2+x+1 = 3$.

График функции изображен на рис. 6.

е) Данная функция определена при $x \geq 0$. Для этих значений $y = (-\sqrt{x})^2 = x$. График функции приведена на рис. 7. ▲

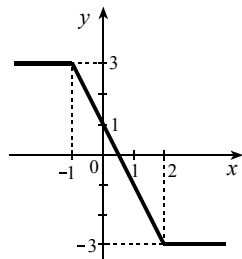


Рис. 6

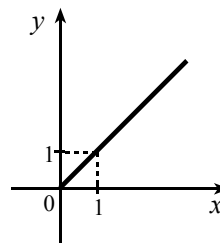


Рис. 7

Пример 2. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 3 - \sqrt{-x}, & \text{если } x \leq 0; \\ 3 - \frac{5}{2}x, & \text{если } 0 < x < 2; \\ \sqrt{x-2} - 2, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

Δ На рис. 3 в предыдущем примере мы строили график функции $y = -\sqrt{-x}$. Значения данной функции при $x \leq 0$ получаются из значений функции $y = -\sqrt{-x}$ прибавлением числа 3, т. е. график функции $y = 3 - \sqrt{-x}$ получается из графика функции $y = -\sqrt{-x}$ сдвигом параллельно оси Oy на 3 единицы вверх.

Рассмотрим функцию $y = 3 - \frac{5}{2}x$. Ее графиком является прямая, проходящая через точки $(0;3)$ и $(2;-2)$. График данной функции при $0 < x < 2$ совпадает с графиком прямой $y = 3 - \frac{5}{2}x$. При $x \geq 2$ можно сначала построить график функции $y = \sqrt{x-2}$, а затем сдвинуть на 2 единицы вниз параллельно оси Oy . Составим таблицу значений функции

x	-9	-1	0	2	6
y	0	2	3	-2	0

График функции приведен на рис. 8. ▲

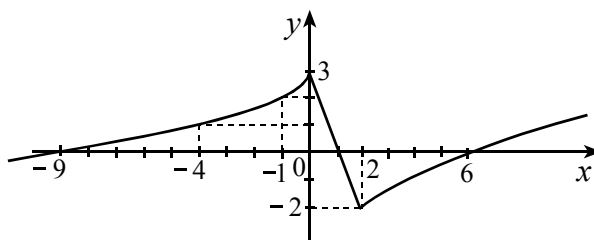


Рис. 8

Контрольные вопросы

- 1(5). Докажите что число $\sqrt{5}$ является иррациональным числом.
 2(1). Укажите, какие из ниже перечисленных чисел являются рациональными, а какие иррациональными:

$$\sqrt{23}; \quad 2,35(87); \quad \sqrt{\frac{1}{71}}; \quad -53,244; \quad \frac{103}{338}; \quad \sqrt{25}.$$

3(2). При каких x имеет смысл выражение:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{2x+1}{\sqrt{3x+5}}; \quad \text{б) } \frac{3x-2}{\sqrt{x+\sqrt{x-3}}}; \quad \text{в) } \frac{2}{\sqrt{2x-\sqrt{3x-1}}}; \\ \text{г) } & \frac{3}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{6}}; \quad \text{д) } \frac{2x+5}{(x-8)\sqrt{x^2-16}}; \quad \text{е) } \frac{\sqrt{2x-7}}{\sqrt{9-x}}. \end{aligned}$$

4(2). Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } & 3\sqrt{x}-5=0; \quad \text{б) } 6\sqrt{x+1}+11=0; \quad \text{в) } \sqrt{8x-7}=1; \\ \text{г) } & \sqrt{5x-7}=\sqrt{5-x}. \end{aligned}$$

5(1). Сравните числа $a = \sqrt{\frac{995}{3}}$ и $b = 2\sqrt{83}$.

6(1). Между какими последовательными натуральными числами расположено число $a = \frac{2}{3}\sqrt{3541}$.

7(1). Докажите, что $(5\sqrt{2}-2\sqrt{13})^2 = 102-20\sqrt{26}$. Следует ли из этого, что $\sqrt{102-20\sqrt{26}} = 5\sqrt{2}-2\sqrt{13}$?

8(3). Упростите выражение: а) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

б) $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right) \cdot \frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}$,

при условии $a > b > 0$;

в) $\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{11})(\sqrt{33}+\sqrt{15}-\sqrt{22}-\sqrt{10})}{\sqrt{75}-\sqrt{50}}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

9(3). Сократите дробь:

а) $\frac{x-25}{\sqrt{x+5}}$; б) $\frac{x+16}{\sqrt{-x-4}}$; в) $\frac{x\sqrt{x}-17\sqrt{17}}{x+\sqrt{17x+17}}$.

10(2). Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{3}{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$.

11(2). Докажите, что число, равное $\sqrt{|24\sqrt{2}+34|}-\sqrt{|24\sqrt{2}-34|}$, является натуральным.

12(2). Постройте график функции:

а) $y = 2 - \sqrt{(x-1)^2}$; б) $y = \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{|x-2|}$.

Задачи

1(2). Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sqrt{\frac{136}{3}}$; $3\sqrt{5}$; $7,(1)$; $\sqrt{45,6}$. б) $2\sqrt{17}-2\sqrt{3}$; $\sqrt{7}+\sqrt{19}$; $3\sqrt{3}$.

2(2). Докажите, что число $2\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$ является иррациональным числом.

3(2). а) Приведите пример двух иррациональных чисел, сумма которых – число рациональное;

б) Приведите пример двух иррациональных чисел, произведение которых – число рациональное.

4(3). Сравните числа (не используя калькулятор):

а) $\sqrt{38}+\sqrt{17}$ и $\sqrt{21}+\sqrt{34}$;

б) $\sqrt{687 \cdot 689} - \sqrt{692 \cdot 690}$ и $\sqrt{688 \cdot 686} - \sqrt{691 \cdot 693}$;

в) $0,397 \cdot 0,021 \cdot 0,0007$ и $\sqrt{0,0397 \cdot 0,0021 \cdot 0,07}$.

5(2). Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{50a^7b^{22}}$, $b \leq 0$; б) $\sqrt{-8a^{11} \cdot b^3}$, $a \leq 0, b \geq 0$;

в) $\sqrt{(\sqrt{23}-3\sqrt{3})^7 \cdot (5-\sqrt{29})^{15}}$; г) $\sqrt{\frac{-16}{(b-a)^7}}$.

6(2). Внесите множитель под знак корня:

а) $(3-x)\sqrt{\frac{1}{x-3}}$; б) $-x\sqrt{-x^3}$;

7(3). Решите уравнение:

а) $\sqrt{7x-1}=5$; б) $\sqrt{6x+1}=-3$; в) $|\sqrt{3x-1}-1|=5$;

г) $\frac{\sqrt{16x^2-25}}{\sqrt{5-4x}}=3$; д) $\frac{2\sqrt{x-4}+3}{2+\sqrt{x-4}}=\frac{5}{3}$;

е) $\sqrt{4x^2-24x+36}=\sqrt{25x^2-20x+4}$.

8(3). Упростите упражнение:

а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}$;

б) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a})^3 \cdot \sqrt{b}}{a+b} - \frac{2b}{a-b}$;

в) $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$ при $x = \frac{2a}{b + \frac{1}{b}}$; $a, b > 0$.

9(2). При каких значениях x определено выражение:

$$\sqrt{x-3} + \frac{2}{(x-4)\sqrt{5-x}}?$$

10(1). Освободитесь от внешнего радикала в выражении: $\sqrt{21-6\sqrt{6}}$.

11(2). Используя формулу двойного радикала, упростите выражение:

$$\sqrt{93 + \sqrt{3888}}.$$

12(5). Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{x+3} - 1$; б) $y = 2 - \sqrt{3-x}$; в) $y = \sqrt{(x-4)^2} - \sqrt{(x+1)^2}$;

г) $y = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x(x+1)}$; д) $y = \begin{cases} \sqrt{x-1}-1, & \text{если } x \geq 1; \\ -x^2, & \text{если } x \in (-2; 1); \\ \frac{8}{x}, & \text{если } x \leq -2. \end{cases}$

