§6. Примеры решения задач

Приступая к решению задач, сделаем несколько общих замечаний.

Во-первых, при решении задач нужно прежде всего выяснить, какие силы действуют на тело, движение которого мы рассматриваем. Все известные силы надо изобразить на рисунке, отчетливо представляя при этом, со стороны каких тел действуют эти силы. Следует помнить, что силы, с которыми взаимодействуют тела, согласно 3-му закону Ньютона возникают парами и приложены к разным телам. Поэтому на данное тело может действовать лишь одна из двух таких сил.

Во-вторых, нужно выбрать инерциальную систему отсчета, относительно которой рассматривается движение тела (или тел). Направления координатных осей лучше выбирать из соображений удобства, чтобы проекции сил на эти оси определялись наиболее просто.

В-третьих, для рассматриваемого тела (или тел) следует записать уравнение 2-го закона Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots. \qquad (1)$$

После этого записанное уравнение (1) нужно переписать для проекций ускорения и сил на оси выбранной системы координат. Если все силы, действующие на тело, лежат в одной плоскости, то при выборе системы координат можно ограничиться двумя осями x и y, и тогда векторное уравнение (1) преобразуется в равносильную систему уравнений для проекций на эти оси:

$$\begin{cases} ma_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots, \\ ma_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots. \end{cases} \qquad (1.1)$$

При этом следует использовать известные Вам выражения для входящих в эти уравнения сил (сил тяжести, упругости, трения и т.п.).

В-четвертых, при решении задач о движении системы тел, соединенных тем или иным способом друг с другом, одних уравнений системы (1.1), как правило, недостаточно. Тогда необходимо записать так называемые кинематические условия, выражающие соотношения между ускорениями тел, обусловленные связями между ними.

В-пятых, если в задаче требуется найти не только силы и ускорения, но также координаты (перемещения или пройденный путь) тел и их скорости, то кроме уравнений системы (1.1), нужно использовать известные Вам из предыдущего задания по физике кинематические уравнения для координат и скоростей.

В-шестых, решение задачи сначала лучше получить в общем виде и лишь затем подставлять числовые значения в одной системе единиц (СИ).

● **ЗАДАЧА 1.** Два тела массами m_1 и m_2, связанные легкой нерастяжимой нитью, движутся по гладкому горизонтальному столу под действием горизонтальной силы $\vec{F}$ (рис. 6). Чему равны сила натяжения нити и ускорение тел?

РЕШЕНИЕ. Часто в условии задачи содержится дополнительная информация. В данном случае тот факт, что нить легкая, означает, что масса нити равна нулю, а из того, что нить нерастяжимая, следует, что изменением длины нити (удлинением) можно пренебречь и, следовательно, ускорения тел вдоль нити одинаковы по модулю: $a_1 = a_2 = a$ (это кинематическое условие). Словосочетание «гладкий стол» позволяет заключить, что трение между телами и столом отсутствует (сила трения скольжения равна нулю).

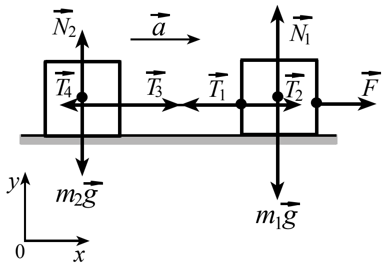

Рис. 6

Изобразим на рис. 6 действующие силы и выберем направление ускорения, совпадающее с направлением силы $\vec{F}$. Выберем систему отсчета. Практически всегда удобно за положительное направление кординатной оси выбрать направление ускорения тел. На рис. 6 $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия тела m_1 и нити (сила $\vec{T}_1$ приложена к телу со стороны нити, а сила $\vec{T}_2$ приложена к нити со стороны тела), $\vec{T}_3$ и $\vec{T}_4$ – силы взаимодействия тела m_2 и нити (сила $\vec{T}_3$ приложена к телу со стороны нити, а сила $\vec{T}_4$ приложена к нити со стороны тела). По третьему закону Ньютона $T_1 = T_2$ и $T_3 = T_4$. Уравнение (1) для нити в проекциях на ось Ox имеет вид $T_2 - T_4 = ma$. Но поскольку нить легкая, т.е. $m = 0$, то $T_2 - T_4 = 0$ и, следовательно, $T_2 = T_4$. Значит и $T_1 = T_3$. Далее для удобства обозначим силы взаимодействия тел с нитью через $\vec{T}$.

Для первого тела уравнение (1) имеет вид: $m_1\vec{a} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}$. Запишем его в проекциях на ось Ox :

$$m_1 a = F - T. \qquad (*)$$

Для второго тела $m_2\vec{a} = \vec{T} + m_2\vec{g} + \vec{N}_2$, а в проекциях на ось Ox :

$$m_2 a = T. \qquad (**)$$

Решая совместно уравнения (*) и (**), получим

$$T = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} \text{ и } a = \frac{F}{m_1 + m_2}. \bullet$$

● **ЗАДАЧА 2.** Через легкий неподвижный блок перекинута легкая нерастяжимая веревка, к одному из концов которой привязан груз массой $m_1 = 60$ кг. На другом конце веревки повис человек массой $m_2 = 65$ кг, который, выбирая веревку, поднимает груз, оставаясь при этом на одном и том же расстоянии от пола. Через сколько времени груз будет поднят на высоту

$h = 12$ м над полом? В начальный момент груз лежал на полу.

РЕШЕНИЕ. Силы, действующие на человека и груз, показаны на рис. 7 (по аналогии с предыдущей задачей сила натяжения нити $\vec{T}$, действующая на груз и на человека, одинакова). При выборе системы отсчета ограничимся координатной осью Ox (см. рис. 7). Начало отсчета поместим на полу.

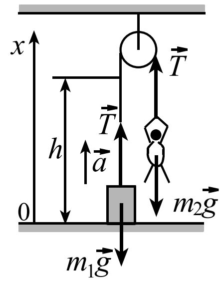

Рис. 7

Запишем уравнение (1) для груза и человека в векторном виде: $m\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}$ и $0 = m_2\vec{g} + \vec{T}$ (в последнем уравнении мы учли, что человек неподвижен относительно пола и, следовательно, его ускорение равно нулю). В проекциях на ось Ox эти уравнения дают:

$$ma = -m_1 g + T \text{ и } 0 = -m_2 g + T.$$

Отсюда, исключив T, легко найти ускорение груза: $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1}$.

Так как в начальный момент груз был неподвижен, то время подъема на высоту h определим из известного кинематического уравнения $h = at^2/2$:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2hm_1}{(m_2 - m_1)g}} \approx 5{,}42\,\text{с.} \bullet$$

• **ЗАДАЧА 3.** Чему равны силы натяжения нитей $abcdef$ и gh в устройстве с подвижным блоком, изображенном на рисунке 8? Массы тел соответственно равны $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 2$ кг. Нити легкие и нерастяжимые, массами блоков пренебречь.

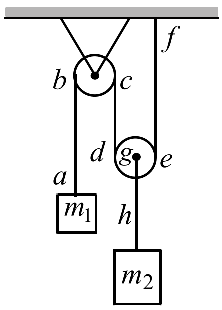

Рис. 8

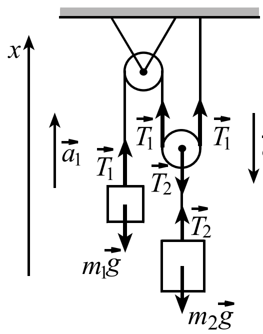

Рис. 9

РЕШЕНИЕ. Изобразим силы на рис. 9. Нить $abcdef$ будет действовать на тело массой m_1 и на левую и правую стороны подвижного блока с одинаковой силой $\vec{T}_1$ (нить легкая, блоки легкие). Нить gh будет действовать на подвижный блок и тело массой m_2 с силами $\vec{T}_2$ (нить легкая, блок легкий). Силы, действующие на нити и на неподвижный блок не влияют на ход решения задачи, и мы их изображать не будем.

Выберем произвольно направления ускорений тел и направим координатную ось x вертикально вверх (см. рис. 9). Запишем уравнение (1), выражающее второй закон Ньютона, для обоих тел и для подвижного блока сразу в проекциях на координатную ось:

$$m_1a_1 = T_1 - m_1g, \quad -m_2a_2 = T_2 - m_2g, \quad 0 = 2T_1 - T_2.$$

Последнее уравнение написано для подвижного блока с учетом того, что его масса равна нулю.

Записанные три уравнения содержат четыре неизвестных: T_1, T_2, a_1 и a_2. Необходимо добавить кинематическое условие, связывающее ускорения тел. При наличии подвижного блока модуль ускорения тела массой m_1 в два раза больше модуля ускорения тела массой m_2, так как за одно и то же время первое тело пройдет вдвое больший путь, чем второе. Следовательно, $a_1 = 2a_2$.

Мы получили четвертое недостающее уравнение, с учетом которого написанные выше уравнения дают: $2m_1a_2 = T_1 - m_1g$, $-m_2a_2 = 2T_1 - m_2g$. Отсюда находим $a_2 = \dfrac{m_2 - 2m_1}{m_2 + 4m_1}g \approx -2{,}8$ì/с ^{2}, $T_1 = \dfrac{3m_1m_2g}{m_2 + 4m_1} \approx 12{,}6H$.

Учитывая, что $T_2 = 2T_1$, получим $T_2 = \dfrac{6m_1m_2g}{m_2 + 4m_1} \approx 25{,}2$ Н. Знак минус у проекции ускорения второго тела показывает, что на самом деле ускорение $\vec{a}_2$ направлено в другую сторону, т.е. вверх вдоль оси Ox.

Проекция ускорения первого тела $a_1 = 2a_2 \approx -5{,}6$ м/с^2. Вновь знак минус показывает, что на самом деле ускорение $\vec{a}_1$ направлено в другую сторону, т.е. вниз (противоположно оси Ox). ●

● **ЗАДАЧА 4.** Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем возвращается к месту броска. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол α. Коэффициент трения скольжения между шайбой и плоскостью равен μ. Чему равно ускорение шайбы при движении а) вверх по наклонной плоскости, б) вниз по наклонной плоскости?

РЕШЕНИЕ. а) При движении вверх действующие на шайбу силы изображены на рис.10: $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения скольжения, $\vec{N}$ – сила нормальной реакции опоры. Выберем инерциальную систему отсчета и направим оси координат так, как показано на рис. 10. Ускорение шайбы направим вдоль наклонной плоскости вниз. Запишем уравнение (1) второго закона Ньютона сразу в проекциях на оси координат:

$$Ox: \quad ma = mg\sin\alpha + \mu N,$$

$$Oy: \quad 0 = N - mg\cos\alpha.$$

В первом уравнении мы учли, что сила трения скольжения равна $F_{тр} = \mu N$. Записанные уравнения дают:

$$a = (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g.$$

б) При движении шайбы вниз по наклонной плоскости на нее действуют те же силы (рис. 11), только направление силы трения скольжения поменялось на противоположное, и теперь эта сила направлена вдоль наклонной плоскости вверх. Выберем инерциальную систему отсчета так же, как и в предыдущем случае (рис. 11). Ускорение шайбы направим вдоль наклонной плоскости вниз.

Уравнение (1) в проекциях на оси координат дает:

$$Ox: \quad ma = mg\sin\alpha - \mu N,$$

$$Oy: \quad 0 = N - mg\cos\alpha.$$

(И вновь в первом уравнении мы учли, что сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N$). Совместное решение написанных уравнений позволяет найти ускорение шайбы: $a = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g.$

Если при подстановке конкретных числовых значений μ и α выражение в скобках окажется отрицательным, то это будет означать, что на самом деле направление ускорения шайбы будет противоположно выбранному. ●

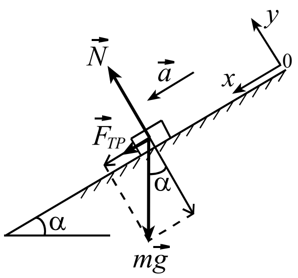

Рис. 10

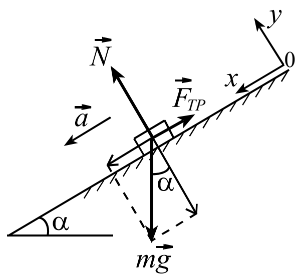

Рис. 11

● **ЗАДАЧА 5.** На две частицы – одну массы m, летящую со скоростью v, другую массы $2m$, летящую со скоростью $2v$ перпендикулярно к первой (рис. 12), – в течение некоторого одинакового промежутка времени действуют одинаковые по модулю и направлению силы. К моменту прекращения действия сил первая частица начинает двигаться в обратном направлении со скоростью $2v$.

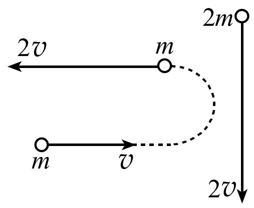

Рис. 12

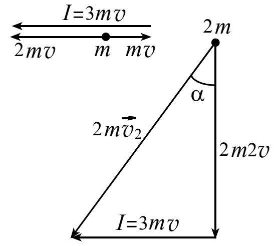

Рис. 13

С какой скоростью будет двигаться при этом вторая частица?

РЕШЕНИЕ. Векторная разность конечного и начального импульсов первой частицы равна импульсу $\vec{I}$ действовавшей на неё силы (рис. 13). Его модуль равен $I = 3mv$. Такой же импульс силы $\vec{I}$ действовал на вторую частицу. Её конечный импульс $2m\vec{v}_2$ равен векторной сумме её начального импульса $2m2\vec{v}$ и импульса силы $\vec{I}$ (рис. 13). Используя теорему Пифагора, находим скорость v_2, а именно: $2mv_2 = \sqrt{(2m2v)^2 + I^2} = 5mv.$

Откуда $v_2 = \dfrac{5}{2}v$. Направление вектора $\vec{v}_2$ определим углом α к направлению начального импульса частицы. Очевидно, что $tg\alpha = \dfrac{1}{4mv} = \dfrac{3mv}{4mv} = \dfrac{3}{4}.$

Внимание! Контрольные вопросы и задачи, предложенные ниже, расположены не по принципу возрастания степени их сложности, а по порядку изложения соответствующих тем в тексте данного задания.