Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Последовательности. Предел последовательности. Предел функции. Исследование функций

Задание №3 для 10-х классов

(2006-2007 учебный год)

г. Долгопрудный, 2006

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 10-х классов (2006-2007 учебный год). - М.: МФТИ, 2006, 32 с.

Дата присылки заданий по физике и математике – 2 декабря 2006 г.

Внимание! Произошло **изменение** в лектории.
Лекции в ноябре будут прочитаны:

11 ноября – **математика:** Последовательность. Предел последовательности. Предел функции. Исследова ние функций. (Колесникова С.И.)

25 ноября – **физика:** Закон сохранения энергии в тепловых процессах. (Кузьмичев С.Д.)

Составитель:
Колесникова Софья Ильинична
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 14.10.06
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0
Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 2400. Заказ № 6-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (495) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (495) 409-9351 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru
Наш сайт: www.school.mipt.ru

Дорогие десятиклассники!

Содержание этого задания, быть может, выйдет за рамки обычной школьной программы, но оно очень важно для понимания всего дальнейшего материала, изучаемого в школе. Внимательно изучите текст.

§1. Бесконечные последовательности. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x. Это значит, что на множестве N натуральных чисел задана числовая функция $x = x(n)$; эта функция называется *бесконечной числовой последовательностью*. Аргумент n этой функции записывается в виде индекса, т. е. вместо записи $x(n)$ чаще всего употребляется запись x_n. Иногда последовательность задается не на всем множестве N, а на некотором конечном подмножестве. Тогда говорят о *конечной* последовательности.

Приведем примеры.

(I) 1; 1; 1; … (т. е. $x_n = 1$ для всех n);

(II) 1; 2; 4; 8; … (т. е. $x_n = 2^{n-1}$);

(III) последовательность, n-й член которой равен n-му знаку после запятой в десятичной записи числа $\frac{8}{33}$;

(IV) то же для числа π;

(V) последовательность, n-й член которой равен количеству простых чисел, не превосходящих n;

(VI) последовательность, n-й член которой равен площади правильного треугольника со стороной n.

Иногда вместо множества N всех натуральных чисел бывает удобно в качестве области определения последовательности рассматривать множество всех целых чисел n таких, что $n \geq n_0$, где n_0 – фиксированное целое число (при $n_0 = 1$ получаем множество $\mathbb{N}$). Последовательность (II) удобно записать так: $x_n = 2^n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; последовательность $x_n = \frac{1}{n-1}$ имеет смысл рассматривать при $n \geq 2$, а последовательность $x_n = \sqrt{n+2}$ можно рассматривать при $n \ge -2$. Легко убедиться, что в примере (III) $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4$ и т. д., т. е. $x_n = 3 + (-1)^n,\ n \ge 1$. Ясно также, что в примере (VI) $x_n = \frac{\sqrt{3}}{4} n^2$. А вот явные формулы для общего члена последовательностей (IV) и (V) написать невозможно. Тем не менее, многие свойства этих последовательностей установлены и без формул. Таким образом, явное задание формулы общего члена не является необходимым для изучения свойств последовательности.

И все же, при любом задании последовательности в первую очередь возникает вопрос, нельзя ли выписать явно формулу общего члена. Особенно часто такой вопрос возникает, когда последовательность задана рекуррентно, т. е. даны несколько первых членов последовательности и формула, выражающая последующие члены через предыдущие. Рассмотрим примеры таких последовательностей.

§2. Арифметическая прогрессия

Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется *арифметической прогрессией.* Число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

Из определения следует, что $x_{n+1} = x_n + d,\ n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, определение арифметической прогрессии задает эту последовательность рекуррентно. Формула общего члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$x_n = x_1 + d(n-1),\ n = 1, 2, 3 \dots$$

Лемма 1. (характеристическое свойство арифметической прогрессии). Числовая последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, т. е. каждый член последовательности, начиная со второго, является полусуммой соседних, или средним арифметическим соседних членов.

♦Действительно, если задана арифметическая прогрессия, то

$$a_n = a_1 + d(n-1) \Leftrightarrow 2a_n = 2a_1 + 2d(n-1) \equiv$$

$$\equiv \left(a_1 + d\left(n-2\right)\right) + \left(a_1 + dn\right) = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

И, наоборот, если для любого a_n выполнено условие $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$,

то $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Leftrightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow$

$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Это значит, что $\{a_n\}-$ арифметическая прогрессия. ♦

§3. Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю, называется *геометрической прогрессией.* Число q называется *знаменателем* прогрессии.

Из определения следует, что $x_{n+1} = x_n q,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, определение геометрической прогрессии задает эту последовательность рекуррентно. Формула общего члена геометрической прогрессии имеет вид:

$$x_n = x_1 q^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Лемма 2. (характеристическое свойство геометрической прогрессии)**.** Числовая последовательность ненулевых членов является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$, т. е. квадрат каждого члена, начиная со второго, является произведением соседних.

♦ Действительно, если b_n - геометрическая прогрессия, то $b_n^2 = \left(b_1 q^{n-1}\right)^2 = b_1 q^{n-2} \cdot b_1 q^n \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$.

И, наоборот, если $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$, то, разделив обе части на $b_n b_{n-1}$, получим $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Это означает, что $\{b_n\}-$ геометрическая прогрессия. Если все элементы геометрической прогрессии положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$. И тогда последовательность $\{b_n\}$ *положительных* членов является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$, т. е. каждый член последовательности является средним геометрическим соседних. ♦

Пример 1. (МГУ, 2001, географ. ф-т) Числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-c, c-b, 2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать выражение $2a^2-4b^2-c^2+4bc+6a$?

♦По условию, a, b, c - арифметическая прогрессия, $a-c, c-b, 2a$ - геометрическая прогрессия. Воспользуемся леммами 2 и 1 (характеристическими свойствами геометрической и арифметической прогрессий): $\begin{cases} b=\dfrac{a+c}{2}, \\ (c-b)^2=2a(a-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c=\dfrac{a-c}{2}, \\ (c-b)^2=2a(a-c) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-c=\dfrac{a-c}{2}, \\ \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2=2a(a-c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-c=\dfrac{a-c}{2}, \\ (a-c)(a-c-8a)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=a, \\ b=a; \end{cases} \\ \begin{cases} c=-7a, \\ b=-3a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тогда заданное выражение примет вид:

$$2a^2-4b^2-c^2+4bc+6a = \left[\begin{array}{l} 2a^2-4a^2-a^2+4a^2+6a=(a+3)^2-9; \\ 2a^2-4a^2-9a^2+12a^2+6a=(a+3)^2-9 \end{array}\right. = (a+3)^2-9 \geq -9 .$$

Видно, что минимальное значение выражения равно –9. **Ответ.** –9.♦

§ 4. “ Решение ” некоторых рекуррентных соотношений

Последовательность вида $x_1=a,\ x_{n+1}=bx_n+c$.

Лемма 3. Пусть последовательность для $n=1, 2, 3, \ldots$ задана рекуррентно: $x_1=a,\ x_{n+1}=bx_n+c$, $b\neq 1$.

Тогда формулу общего члена всегда можно привести к виду

$$x_n=\left(a-\frac{c}{1-b}\right)b^{n-1}+\frac{c}{1-b}.$$

Если $b=1$, то последовательность является арифметической прогрессией.

Если $c=0$, то последовательность является геометрической прогрессией.

Интерес представляет случай, когда $b\neq 1$, $c\neq 0$. Любопытно, что тогда последовательность может быть сведена к некоторой *геометрической* прогрессии.

♦Преобразуем рекуррентное соотношение (добавим и вычтем некоторое пока произвольное число d):

$$x_{n+1}-d=b(x_n-d+d)+c-d \Leftrightarrow (x_{n+1}-d)=b(x_n-d)+c+bd-d.$$

При заданных b и c всегда можно подобрать такое d, что $bd+c-d=0$: $bd+c-d=0 \Leftrightarrow d=\dfrac{c}{(1-b)}$. Тогда последовательность $\left\{x_n-\dfrac{c}{1-b}\right\}$ будет геометрической прогрессией со знаменателем $q=b$, т. е. $x_{n+1}-d=b(x_n-d)$. Отсюда следует, что $\left(x_n-\dfrac{c}{1-b}\right)=\left(x_1-\dfrac{c}{1-b}\right)b^{n-1} \Leftrightarrow x_n=\left(a-\dfrac{c}{1-b}\right)b^{n-1}+\dfrac{c}{1-b}$, что и требовалось доказать. ♦

Пример 2. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно: $x_1=1;\ x_{n+1}=3x_n+1,\ n=1, 2, 3, \dots$.

Решение. Перепишем соотношение в виде

$$x_{n+1}=3x_n+1 \Leftrightarrow x_{n+1}-a+a=3(x_n-a+a)+1 \Leftrightarrow x_{n+1}-a=3(x_n-a)+1+2a.$$

Выберем число *a* так, чтобы последовательность x_n была геометрической прогрессией, т. е. $a=-\dfrac{1}{2}$ и $x_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(x_n+\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_n+\frac{1}{2}=3^{n-1}\left(x_1+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_n=-\frac{1}{2}+3^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3^n-1}{2}$.

§ 5. Последовательность, заданная рекуррентным линейным однородным соотношением

$$x_1 = a;\ x_2 = b;\ x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n,\ n = 1, 2, \ldots\ .$$

Пусть последовательность для $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ задана рекуррентно:

$$x_1 = a;\ x_2 = b;\ x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Такого типа соотношения называются линейными однородными соотношениями.
Прежде всего обратим внимание на то, что они обладают следующими двумя свойствами (свойствами линейности).

1. Если последовательности y_n и z_n удовлетворяют однородному линейному рекуррентному соотношению, т. е. $y_{n+2} - cy_{n+1} - dy_n \equiv 0$ и $z_{n+2} - cz_{n+1} - dz_n \equiv 0$, то и сумма $y_n + z_n$ удовлетворяет этому соотношению.

♦Действительно, подставим $(y_n + z_n)$ в соотношение $x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n$:

$$(y_{n+2} + z_{n+2}) - c(y_{n+1} + z_{n+1}) - d(y_n + z_n) \equiv (y_{n+2} - cy_{n+1} - dy_n) +$$
$$+ (z_{n+2} - cz_{n+1} - dz_n) \equiv 0.\ ♦$$

2. Если последовательность x_n удовлетворяет однородному линейному рекуррентному соотношению, то при любом A последовательность $y_n = Ax_n$ тоже удовлетворяет этому соотношению.

♦Действительно, подставим $y_n = Ax_n$ в соотношение $x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n$:

$$(Ax_{n+2}) - c(Ax_{n+1}) - d(Ax_n) = A\ (x_{n+2} - cx_{n+1} - dx_n) \equiv 0\ .♦$$

Пусть последовательность для $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ задана рекуррентно: $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n$. Тогда, в зависимости от заданных c и d, всегда можно найти формулу общего члена.
Пусть последовательности для $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ задана рекуррентно:

$$x_1 = a;\ x_2 = b;\ x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Придется рассмотреть три возможности – леммы 4, 5.

Лемма 4. Если $c^2+4d>0$, то формулу общего члена последовательности $x_1=a;\ x_2=b;\ x_{n+2}=cx_{n+1}+dx_n,\ n=1,2,\dots$.

всегда можно привести к виду $x_n=Aq_1^n+Bq_2^n$, где $q_i,\ i=1,2$ – различные корни характеристического уравнения $q^2-cq-d=0$, а A,B определяются заданными “начальными условиями” $x_1=a, x_2=b$.

♦Будем искать решение рекуррентного соотношения в виде $x_n=q^n$. Подставим это x_n в рекуррентное соотношение:

$$q^{n+2}=cq^{n+1}+dq^n \Leftrightarrow q^2=cq+d \Leftrightarrow q^2-cq-d=0.$$

Если $c^2+4d>0$, то уравнение $q^2-cq-d=0$ имеет два различных решения q_1 и q_2. Тогда $x_n=Aq_1^n+Bq_2^n$, в силу свойств 1 и 2, тоже будет решением. Определим A,B:

$$\begin{cases} x_1=Aq_1+Bq_2, \\ x_2=Aq_1^2+Bq_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{x_1q_2^2-x_2q_2}{q_1q_2\left(q_2-q_1\right)}, \\ B=\dfrac{x_2q_1-x_1q_1^2}{q_1q_2\left(q_2-q_1\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{aq_2^2-bq_2}{q_1q_2\left(q_2-q_1\right)}, \\ B=\dfrac{bq_1-aq_1^2}{q_1q_2\left(q_2-q_1\right)} \end{cases}.♦$$

Замечание. Точно так же в виде $x_n=q^n$ ищется решение рекуррентных соотношений вида

$x_1=a_1, x_2=a_2,\dots,x_k=a_k,\ x_{n+k}=b_1x_n+b_2x_{n+1}+\dots+b_kx_{n+k-1},\ n=1,2,\dots$.

В зависимости от корней характеристического уравнения получаем соответствующее решение.

Лемма 5. Если $c^2+4d=0$, то формулу общего члена последовательности $x_1=a;\ x_2=b;\ x_{n+2}=cx_{n+1}+dx_n,\ n=1,2,\dots$. всегда можно привести к виду $x_n=q^n\left(A+Bn\right)$,

где q - единственный корень (кратности 2) характеристического уравнения $q^2-cq-d=0$, а A,B определяются заданными “начальными условиями” $x_1=a, x_2=b$.

♦Будем искать решение рекуррентного соотношения в виде $x_n=q^n$. Подставим это x_n в рекуррентное соотношение:

$q^{n+2} = cq^{n+1} + dq^n \Leftrightarrow q^2 = cq + d \Leftrightarrow q^2 - cq - d = 0$. Так как, по условию, $c^2 + 4d = 0$, то уравнение $q^2 - cq - d = 0$ имеет два одинаковых решения $q_1 = q_2 = \frac{c}{2}$ (один корень кратности 2). Обозначим единственный корень буквой q и покажем, что nq^n тоже является решением рекуррентного соотношения. Подставим nq^n в соотношение:

$$(n+2)q^{n+2} = c(n+1)q^{n+1} + dnq^n \Leftrightarrow (n+2)q^2 = c(n+1)q + dn \Leftrightarrow$$

$$n\left(q^2 - cq - d\right)n + 2q^2 - cq = 0 \Leftrightarrow n\left(q^2 - cq - d\right)n + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 - c\left(\frac{c}{2}\right) \equiv 0.$$

Определим A, B:

$$\begin{cases} x_1 = q(A+B) \\ x_2 = q^2(A + B\cdot 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 q = q^2(A+B) \\ x_2 - x_1 q = Bq^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2x_1 q - x_2}{q^2} \\ B = \dfrac{x_2 - qx_1}{q^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{2aq - b}{q^2} \\ B = \dfrac{b - aq}{q^2}. \end{cases}$$ Отсюда следует, что $x_n = q^n\left(\frac{2aq-b}{q^2} + \frac{b-aq}{q^2}n\right)$,

$q = \frac{c}{2}$. Утверждение доказано.

Если $c^2 + 4d < 0$, то уравнение $q^2 - cq - d = 0$ не имеет действительных решений.

Этот случай сейчас мы рассматривать не будем.

Пример 3. Последовательность x_n задана рекуррентно:

$x_1 = a;\ x_2 = b;\ x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right),\ n = 3,4,\dots$. Найдите формулу общего члена.

- **Первый способ**

Найдем формулу общего члена по члена по общим правилам для линнейных однородных рекуррентных соотношений: будем искать x_n в виде $x_n = \lambda^n$. Подставляем x_n в соотношение:

$$\lambda^n = \frac{1}{2}\left(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\right) \Leftrightarrow \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}(\lambda+1)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \left[\begin{array}{l} 1; \\ -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$ Отсюда следует, что $x_n = c\cdot 1^n + d\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Найдем c, d, исходя из заданных x_1 x_2:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d\left(-\dfrac{1}{2}\right) = a, \\ c + \dfrac{d}{4} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \dfrac{4}{3}(b-a), \\ c = \dfrac{a+2b}{3}. \end{cases}$$

Поэтому $x_n = \dfrac{a+2b}{3} + \dfrac{4(b-a)}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Второй способ

Рассмотрим разность $x_n - x_{n-1}$:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right) - x_{n-1} \equiv \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{2} \equiv -\frac{1}{2}\left(x_{n-1} - x_{n-2}\right).$$

Подставляя в правую часть полученного равенства вместо n номера $n-1, n-2, \ldots$, получим:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}\left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(x_{n-2} - x_{n-3}\right) = \ldots =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(x_2 - x_1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a).$$

Поэтому

$$x_n = a + \left(x_n - a\right) = a + \left(x_n - x_{n-1}\right) + \left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) + \ldots + \left(x_2 + x_1\right) =$$

$$= a + \left(b-a\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \ldots + 1\right) = a + \left(b-a\right)\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} =$$

$$=a-2\left(b-a\right)\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}{3}=a-2\left(b-a\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2\left(b-a\right)}{3}=$$

$$-2\left(b-a\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2b-2a+3a}{3}=4\left(b-a\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{a+2b}{3}.$$

Итак, формула общего члена заданной рекуррентно последовательности имеет вид $x_n=\frac{a+2b}{3}+\frac{4\left(b-a\right)}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$.

Ответ: $\frac{a+2b}{3}+\frac{4\left(b-a\right)}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$**.** ♦

Пример 4. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно:
$x_1=a,\ x_2=b,\ x_{n+1}=2x_n-x_{n-1},\ n\geq 2$. Найдите формулу общего члена последовательности.

♦Найдем формулу общего члена по члена по общим правилам для линейных однородных рекуррентных соотношений: будем искать x_n в виде $x_n=q^n$. Подставляем x_n в заданное соотношение:
$q^{n+1}=2q^n-q^{n-1}\Leftrightarrow q^2-2q+1=0\Leftrightarrow q=1$. Отсюда следует, что $a_n=1^n\left(A+Bn\right)$. Найдем $A,\quad B$, исходя из заданных $x_1,\ x_2$:

$$\begin{cases}a_1=\left(A+B\right),\\ a_2=A+2B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\left(A+B\right),\\ b=A+2B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=b-a,\\ A=2a-b.\end{cases}$$

Тогда $a_n=\left(2a-b+\left(b-a\right)n\right)\equiv\left(a+a-b+\left(b-a\right)n\right)\equiv$
$\equiv a+\left(b-a\right)\left(n-1\right)$, т. е. $a_n=a+\left(b-a\right)\left(n-1\right)$.

Но ведь это арифметическая прогрессия! Действительно, $x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}\Leftrightarrow x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n+1}}{2}$.

Ответ: $a+\left(b-a\right)\left(n-1\right)$.♦

Рекуррентное соотношение может не задавать последовательности. Например, если $x_1=\frac{2}{3},\ x_{n+1}=\frac{1-x_n}{x_n},\ n=1,2,3,\ldots$, то $x_2=\frac{1}{2},\ x_3=1$, $x_4=0$, и все члены, начиная с пятого, не определены.

§6. Понятие о пределе последовательности

В курсе алгебры и начал анализа 10 – 11 классов важную роль играет понятие производной. Производная определяется при помощи понятия предела функции, которое в обязательной школьной программе фактически отсутствует (не определяется аккуратно). Мы приведем схему построения теории пределов последовательностей и функций (без доказательств).

При рассмотрении последовательности любой ее элемент с конкретным номером можно нанести на числовую ось, но невозможно в общем случае нанести на числовую ось *все* элементы последовательности. Однако возникает вопрос – нельзя ли что – нибудь определенное сказать, где расположены *все* элементы последовательности. Например, у последовательности $x_n=(-1)^n$ элементы с четными номерами расположены в точке $x=1$, а элементы с нечетными номерами расположены в точке $x=-1$; у последовательности $a_n=(-1)^n n$ элементы «разбегаются» сколь угодно далеко по оси вправо и влево; элементы последовательности $b_n=n$ «бегут» только вправо; про то, где расположены *все* элементы последовательности $c_{n+1}=\frac{1}{2}\left(c_n+\frac{2}{c_n}\right)$ сразу ничего сказать нельзя. Чтобы ответить на вопрос, где расположены *все* элементы последовательности, вводится понятие *предела* последовательности.

Интервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется ε - окрестностью точки a.

Символ ∞, конечно, не точка и не число. Но в последнее время все чаще встречаются понятия окрестности ∞, окрестности ($+\infty$), окрестности ($-\infty$). Под ε - окрестностью ($+\infty$) понимается интервал $(\varepsilon;+\infty)$, под ε - окрестностью ($-\infty$) понимается интервал $(-\infty;\varepsilon)$, а под ε - окрестностью ∞ понимается объединение интервалов $(-\infty;\varepsilon)$ и $(\varepsilon;+\infty)$.

Предел числовой последовательности можно определить следующим образом.

Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε - окрестности точки a лежат все члены последовательности с номерами, начиная с некоторого числа, которое обычно обозначается как N+1. Это означает, что в любой ε -окрестности точки a лежат *все* члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением, быть может, *конечного* их числа (вне ε - окрестности могут находиться члены с номерами 1,2, …, N или некоторые из них).

Иначе говоря, число *a* является пределом последовательности x_n, если вне любой окрестности точки *a* находится не более конечного числа членов x_n. Отсюда следует, что изменение конечного числа членов последовательности не влияет ни на факт существования предела, ни на величину последнего. При этом несущественно также, определены ли члены последовательности при всех $n \geq 1$ или же начиная с некоторого номера n_0.

Тот факт, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел *a*, записывается символически так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая конечный предел (*число a*), называется *сходящейся*; последовательность, не имеющая *конечного* предела, называется *расходящейся*.

Теорема (о единственности предела).

Если последовательность имеет предел, то он только один.

◆ Допустим, что пределов два: *a* и *b*, $b > a$. Рассмотрим ε - окрестности этих точек, где ε =(*b*-*a*)/3. Эти окрестности не пересекаются, и, по условию, в каждой находятся *все* члены последовательности x_n, за исключением, быть может, *конечного* их числа, что невозможно. ◆

Последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой*. Последовательность x_n называется *бесконечно большой*, если последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ является бесконечно малой. Для бесконечно больших последовательностей применяется запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Одновременно это означает, что в любой ε - окрестности ∞ лежат *все* члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением *конечного* их числа.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если в любой ε - окрестности ($+\infty$) лежат *все* члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением *конечного* их числа.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если в любой ε - окрестности $(-\infty)$ лежат *все* члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением *конечного* их числа.

При любых $\alpha > 0$ и любых $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Если же $q < -1$, то последовательность q^n бесконечно большая, но знак ее все время меняется, поэтому неверно ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = -\infty$, в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Доказательство. Точка $x_n = \frac{1}{n}$ принадлежит ε – окрестности точки $a = 0$ в том и только в том случае, когда $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (следовательно, для всех n, кроме конечного числа значений).

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

При вычислении пределов на практике редко пользуются определением предела. Обычно применяют некоторые стандартные (доказанные в теоретических курсах) предельные равенства, например:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0, \text{ если } a > 0; \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1 \qquad (1)$$

и т. д., а также различные теоремы о пределах.

Сформулируем теоремы об арифметических операциях с пределами.

Если последовательности $\{x_n\}$, и $\{y_n\}$ *сходятся*, то сходятся и последовательности $\{\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ (в последнем случае надо требовать, чтобы $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$). При этом

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+2}{n^2+2}$.

Решение. В этом примере теорема о пределе частного неприменима, т. к. пределы числителя и знаменателя не существуют: и числитель и знаменатель стремятся к ∞ при $n\to\infty$. В таком случае сначала надо вынести x в старшей степени в числителе и знаменателе, сократить общую степень, а затем попробовать применить теоремы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2-3\cdot 0+2\cdot 0}{1+2\cdot 0}=2.$$

Геометрическая прогрессия $\{x_n\}$ называется *бесконечно убывающей*, если $|q|<1$ (q – знаменатель прогрессии). *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где S_n – сумма ее первых n членов. Известно, что $S_n = x_1\dfrac{q^n-1}{q-1} = \dfrac{x_1}{q-1}q^n + \dfrac{x_1}{1-q}$; поэтому сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{x_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}q^n+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{q-1}\cdot 0+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{1-q}.$$

Пример 3. Последовательность x_n задана рекуррентно: $x_1 = a$; $x_2 = b$; $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$, $n = 3,4,\ldots$. Доказать, что последовательность сходится и найти ее предел.

Решение. Из примера 2 следует, что $x_n = \dfrac{a+2b}{3} + \dfrac{4(b-a)}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{a+2b}{3}$.

§7. Понятие о пределе функции

Одним из стандартных определений предела функции, принятых в математическом анализе, является следующее (так называемое, определение по Гейне).

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если для *любой* последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Это определение символически выражается записью $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$. В определении предела рассматриваются значения x_n, не равные a, поэтому в самой точке a функция $f(x)$ может не быть определена; если значение $f(a)$ определено, то оно не обязано совпадать с b.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Доказательство. Функция $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена при $x = 1$, но при $x_n \neq 1$ имеет место равенство $f(x_n) = x_n + 1$. Значит, если $x_n \neq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$.

По определению предела функции, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа (обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$), если для любой последовательности x_n такой, что $x_n > a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a слева (обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$), если для любой последовательности x_n такой, что $x_n < a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Пример 2. Найти пределы справа и слева в точке 0 функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \\ \text{-}1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Решение. Для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,$ выполняется равенство $\mathrm{sign} x_n = 1,$ поэтому $\lim\limits_{x\to 0+0} \mathrm{sign}\, x = 1.$ Для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n < 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,$ выполняется равенство $\mathrm{sign} x_n = -1,$ поэтому $\lim\limits_{x\to 0-0} \mathrm{sign}\, x = -1.$

При рассмотрении многих вопросов (например, при построении графиков) возникает понятие предела функции при $x \to \infty$ (применяется запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$). Говорят, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b,$ если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

Аналогично определяются записи $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b.$ Можно определить также понятие бесконечно большого предела функции. Например, говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty,$ если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty.$ Говорят, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$ если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$

Аналогично можно определить, что значит $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty,$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ и т. д.

Можно доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sign} x = 1,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sign} x = -1,$ $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{sign} x$ не существует.

§8. Непрерывность функции

Если функция $f(x)$ определена в точке a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a),$ то функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a. Иными словами, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ выполняется равенство

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Оговорка $x_n \neq a$ здесь не нужна, так как при $x_n = a$ соответствующие значения $f(x_n)$ равны $f(a)$.

Функция $y = |\operatorname{sign} x| = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq 0; \\ 0, \text{ если } x = 0, \end{cases}$ график которой изображен на рис. 1, не является непрерывной в точке 0. В самом деле, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, а $f(0) = 0$.

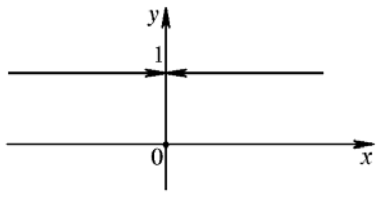

Рис. 1

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (конечном или бесконечном), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Элементарные функции, изучаемые в школьном курсе, непрерывны на любом интервале, на котором они определены. Например, функция x^3 непрерывна на $(-\infty;+\infty)$; функция $\sqrt{x}$ непрерывна на $(0;+\infty)$; функция $\operatorname{ctg} x$ непрерывна на $(0;\pi)$.

Для вычисления пределов функций часто бывает полезна следующая теорема. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда существуют

$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)+g(x)\bigr) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

$$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)g(x)\bigr) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x);\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

(в последнем случае нужно требовать, чтобы $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$ и чтобы $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Отсюда следует, что любой многочлен $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ непрерывен в любой точке, а любая рациональная функция (отношение двух многочленов) непрерывна в любой точке, где знаменатель не обращается в ноль.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 3x + 2\right) = 2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 0.$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3 - 8x + 1}{3x - 5} = \dfrac{5\cdot 1^3 - 8\cdot 1 + 1}{3\cdot 1 - 5} = 1.$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1}(x + 1) = 1 + 1 = 2.$

В примерах 3 и 4 мы воспользовались непрерывностью данных функций в заданных точках. В примере 5 непосредственной подстановкой $x=1$ предел вычислить не удается, т. к. и числитель, и знаменатель дроби в точке $x=1$ обращаются в ноль. Как говорят, имеет место неопределенность 0 : 0. Для раскрытия этой неопределенности мы заметим, что $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ при $x \neq 1$, поэтому при исследовании предела при $x \to 1$ функцию $\frac{x^2-1}{x-1}$ можно заменить на функцию $x+1$, которая непрерывна в точке $x=1$ (см. также пример 1).

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x-2}-2\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}=\frac{1}{\sqrt{6-2}+2}=\frac{1}{4}.$$

В последнем примере непосредственной подстановкой $x=6$ предел вычислить не удается (неопределенность 0 : 0). Приходится прибегнуть к искусственному приему – умножению числителя и знаменателя дроби на «сопряженное выражение» $\sqrt{x-2}+2$. В итоге оказывается, что при $x \neq 6$ данная дробь равна $\frac{1}{\sqrt{x-2}+2}$, а последняя функция уже непрерывна в точке $x=6$.

Соображения, связанные с непрерывностью функций, часто применяются при вычислении пределов последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\left(5\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}\right)=5.$$

Пример 7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$= \frac{2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{2\cdot 0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 0.$$

Пример 8.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n+\sqrt[3]{8n^3-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{3+\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2-3\cdot 0}{3+\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{5}.$$

Теорема о пределах суммы, произведения и частного двух функций остается справедливой, если в ней всюду заменить $x\to a$ на $x\to a+0$, $x\to a-0$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

Можно доказать, что если $f(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки *a* (кроме, быть может, самой точки *a*) и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$. Обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$. Утверждения эти сохраняются, если заменить *a* на $a+0$, $a-0$, ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Пример 9. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{2x^3+x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1-2\cdot 0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$$

§9. Асимптоты

На рис. изображен график функции $f(x)=\frac{1}{x}$. Как мы уже отмечали, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Геометрически это соответствует тому, что при $x\to 0$ график неограниченно приближается к оси y (прямой $x=0$); при $x\to\infty$ график неограниченно при-

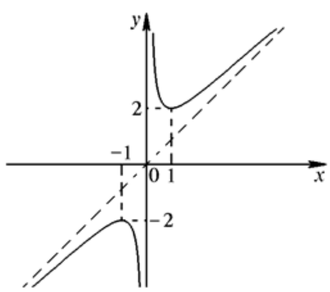

Рис. 2

ближается к оси x (прямой $y = 0$). В этом случае говорят, что график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Бывают еще и наклонные асимптоты. Многим знаком график функции $y = x + \frac{1}{x}$ (рис. 2). Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$, то график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. При $x \to \infty$ горизонтальной асимптоты нет: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, и график неограниченно приближается к прямой $y = x$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\right)$. Прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика $y = x + \frac{1}{x}$. Дадим теперь определения всех типов асимптот.

I. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$. Так, для функций $f(x) = \frac{1}{x}$ и $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (рис. 2) $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \infty$; каждый из этих графиков имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. А вот график $y = 2^{1/x}$ (рис. 3) имеет одностороннюю вертикальную асимптоту $x = 0$ ($\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0$).

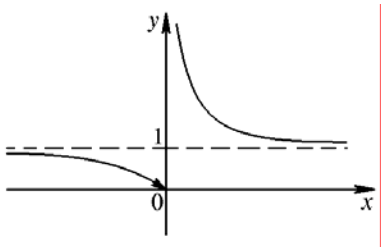

Рис. 3

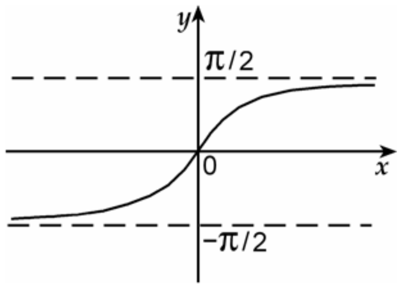

Рис. 4

II. Прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой* графика $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$. Так, для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (асимптота $y = 0$). Для графика на рис. 3

горизонтальной асимптотой является прямая $y=1$. А вот график $y=\operatorname{arctg}x$ (рис. 4) имеет горизонтальную асимптоту $y=\frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ и горизонтальную асимптоту $y=-\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$.

III. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$ или $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0.$ Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных (при $k=0$). График $y=x+\frac{1}{x}$ (рис. 2) имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=x$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=0$).

График $y=x+\operatorname{arctg}x$ имеет односторонние наклонные асимптоты:

$$y=x+\frac{\pi}{2}$$

при $x\to+\infty$ и $y=x-\frac{\pi}{2}$ при $x\to-\infty$ (рис. 5).

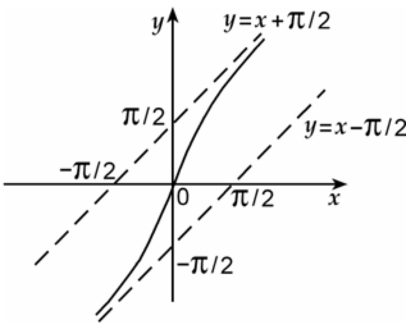

Рис. 5

Наклонные асимптоты при $k\neq 0$ могут иметь место лишь в том случае, когда $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty.$

Пусть прямая $y=kx+b-$ двусторонняя наклонная асимптота графика $y=f(x)$. Заметим, что $\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-kx-b}{x}+k+\frac{b}{x}.$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$ то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$ Ясно, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b.$ Итак,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\;\; b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right). \qquad (2)$$

Обратно, если существуют числа k и b, удовлетворяющие условию (2), то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx-b\right)=0$, т. е. $y=kx+b-$ наклонная асимптота. В случае односторонних наклонных асимптот k и b ищутся по формулам (2), где ∞ заменяется на $+\infty$ или $-\infty$.

Отметим, что существование конечного предела $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ еще не означает наличия асимптоты. Так, для функции $y=\sqrt{x}$: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Поэтому график не имеет асимптоты при $x\to+\infty$.

Пример 10. Найти асимптоты графика $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. Ясно, что $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\infty$,

поэтому график имеет вертикальную асимптоту $x=2$. Далее, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Поэтому ищем

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-4x^2+4x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2-4x+4}=1.$$

График имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y=x+1$.

Пример 11. Найти асимптоты графика $y=x+\sqrt{x^2-2x}$.

Решение. Функция определена при $x^2-2x\ge0$, т. е. при $x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$. Так как в любой точке области определения функция имеет конечный предел, то вертикальных асимптот график не имеет. Исследуем наличие асимптот при $x\to\infty$ (горизонтальных или наклонных).

Так как $f(x)\ge x$ при $x\ge2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Поэтому ищем

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=2$$

(здесь использовано то, что $x=\sqrt{x^2}$ при $x\ge 0$). Далее,

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1}+1}=-1.$$

График имеет наклонную асимптоту $y=2x-1$ при $x\to+\infty$. Обратим внимание на то, что при вычислении $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$ мы столкнулись с разностью двух функций, каждая из которых имеет предел $+\infty$. Как говорят, имеет место неопределенность $\infty-\infty$. Непосредственно такой предел вычислить нельзя. Снова приходится прибегнуть к умножению и делению на «сопряженное» выражение (см. также примеры 6 и 7 из §8).

Что касается $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, то это предел суммы двух функций, одна из которых имеет предел $-\infty$, а другая – предел $+\infty$. Опять-таки нужно применить аналогичное преобразование:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)}{x-\sqrt{x^2-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\frac{2}{1+\sqrt{1}}=1$$

(здесь мы воспользовались тем, что $x=-\sqrt{x^2}$ при $x<0$). График имеет горизонтальную асимптоту $y=1$ при $x\to-\infty$.

§ 10. Построение эскизов графиков функций

Пример 12. Построить график функции $y=\dfrac{3x+1}{5x-7}$. График дробно - линейной функции всегда гипербола. Чтобы узнать, как она расположена в плоскости, надо выделить целую часть, а потом обычную гиперболу передвинуть вверх или вниз, вправо или влево. Для эскиза неважно, сжата она или нет. Но, если вы хотите построить ее поточнее, можно найти значение в нескольких «хороших» точках. Посмотрите, как можно выделить целую часть :

$$y=\frac{3x+1}{5x-7}=\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{5\left(x-\frac{7}{5}\right)}=\frac{3\left(x-\frac{7}{5}+\frac{7}{5}+\frac{1}{3}\right)}{5\left(x-\frac{7}{5}\right)}=\frac{3\left(x-\frac{7}{5}\right)+\frac{21}{5}+1}{5\left(x-\frac{7}{5}\right)}=\frac{3}{5}+\frac{26}{25\left(x-\frac{7}{5}\right)}.$$

Видно, что вертикальная асимптота $x=\frac{7}{5}$, горизонтальная - $y=\frac{3}{5}$.

Пример 2. Построить график функции $y=x^3-3x$.

Функция $y=x^3-3x=x\left(x^2-3\right)$ нечетна и обращается в ноль в точках $x=0,\ x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$. Если перепишем функцию в виде $y=x^3-3x=x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)$, то увидим, что

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)=$$

$$=-\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$$

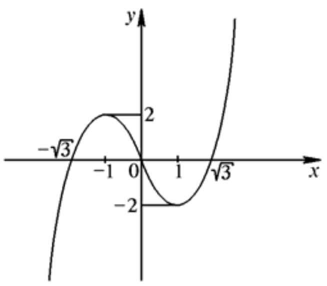

Рис. 6

и при $x\to\infty$ она ведет себя как $y=x^3$, т. к. $y=x^3-3x=x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\approx x^3$. Теперь можно нарисовать эскиз графика этой функции (рис. 6).

Пример 3. Построить график функции $y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. В данном примере график построится проще, если мы сделаем замену переменных: $x-2=t \Leftrightarrow x=t+2$, тогда

$$y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}=\frac{(t+1)^3}{t^2}.$$

Функция $y = \dfrac{(t+1)^3}{t^2}$ определена при $t \neq 0$, обращается в нуль при $t = -1$. Применяя метод интервалов, легко заметить, что $f(t) > 0$ при $t \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ и $f(t) < 0$ при $t \in (-\infty; -1)$.

Ясно, что $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \infty$, поэтому график имеет вертикальную асимптоту $t = 0$, но для построения графика этого мало: необходимо знать, в какую «бесконечность» уходит график. Поэтому уточним, что $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = +\infty$ - значит, график «уходит» сколь угодно далеко вверх.

Далее, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \infty$ - значит, может быть наклонная асимптота. Но здесь тоже очень важно, в какую «бесконечность» уходит график при $t \to +\infty$ и в какую при $t \to -\infty$. Поэтому эти пределы надо находить отдельно. В нашем случае (это имеет место всегда, если числитель и знаменатель – многочлены, а степень числителя на 1 больше степени знаменателя) удобно выделить целую часть дроби:

$$y = \frac{(t+1)^3}{t^2} = \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} = t + 3 + \frac{3t+1}{t^2}.$$

Сразу видно, что $\lim\limits_{t \to -\infty} y = t + 3 + \dfrac{3t+1}{t^2} = -\infty$, а

$\lim\limits_{t \to +\infty} y = t + 3 + \dfrac{3t+1}{t^2} = +\infty$.

Замечательно, что при таком представлении функции *не надо* специально находить коэффициенты для асимптоты – асимптота сама «падает» нам в руки: это прямая $y = t + 3$, т. к. остальная часть в выражении для $y(t)$ стремится к 0 при $t \to \infty$, что соответствует определению наклонной асимптоты. Мало этого, из формулы следует, что $y - (t+3) = \dfrac{3t+1}{t^2} < 0$ при $t \to -\infty$, т. е. график функции при $t \to -\infty$ находится *под* асимптотой, а

$y - (t+3) = \dfrac{3t+1}{t^2} > 0$ при $t \to +\infty$, т. е. здесь график функции при $t \to +\infty$

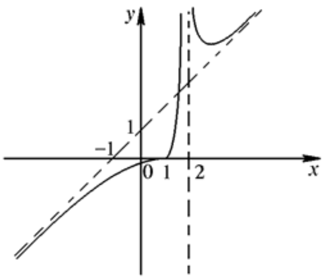

Рис. 7

находится *над* асимптотой.
Теперь мы можем нарисовать эскиз графика (рис. 7).
Из эскиза ясно, что при $t > 0$, где - то есть точка локального минимума, но она находится с помощью производной. Наш график – это только эскиз.

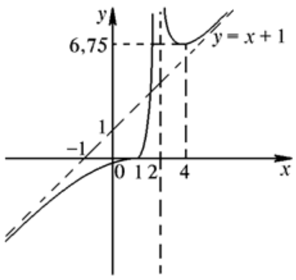

Рис. 8

Для более точного построения графика можно найти значения функции еще в нескольких точках. Но при выполнении данного задания это делать не обязательно. Нас интересует общий вид графика, а не построение его с очень большой точностью. Еще раз напомним, что «интересными» точками являются точки, в которых функция не является непрерывной, точки пересечения графика с осями, поведение в окрестности ∞.
При окончательном построении графика допускаются искажения масштаба там, где это не влияет на общий вид графика и делает рисунок более компактным.

Пример 4. Построить график функции $y = x + \sqrt{x^2 - 2x}$.

Решение. Функция определена при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Если $x \geq 2$, то легко видеть, что $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ при $x = 0$, а при всех $x < 0$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. В самом деле, неравенство $x + \sqrt{x^2 - 2x} > 0$ равносильно неравенству $\sqrt{x^2 - 2x} > -x$; обе части последнего неравенства при $x < 0$ положительны, и после возведения их в квадрат получится равносильное неравенство $x^2 - 2x > x^2$, справедливое при $x < 0$.

При $x \to +\infty$ график имеет наклонную асимптоту $y = 2x - 1$, причем, график находится *под* асимптотой, т. к.

$$y - (2x - 1) = \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1 = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} + 1 =$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} + 1 = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)^2} < 0.$$

При $x \to -\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ (пример 2 из §4), причем

$$y-1 = x+\sqrt{x^2-2x}-1 = \sqrt{x^2-2x}-(1-x) =$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-(1-x)\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+(1-x)\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x}+(1-x)\right)} = \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-2x}+(1-x)\right)} < 0$$

при любом $x \le 0$, т. е. опять график лежит ниже асимптоты.

В рассмотренном примере точки $x = 0$ и $x = 2$ являются граничными точками области определения. При $x \to -0$ функция ведет себя примерно так:

$y = x+\sqrt{x(x-2)} \approx x+\sqrt{-2x} \approx \sqrt{-2x}$, а при $x \to 2+0$ функция ведет себя примерно так: $y = x+\sqrt{x(x-2)} \approx 2+\sqrt{2(x-2)}$.

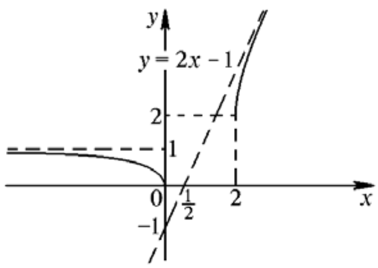

Рис. 9

Теперь можно нарисовать эскиз графика (рис. 9).

Контрольные вопросы

1(3). (МГУ, 2001, географ. ф-т). Числа p, q, r в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $r-p$, $q-r$, $-3p$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $-p^2+8q^2+2r^2-8qr+4p$?

2(3). (МГУ, 1993, мехмат) Сумма первых 7 членов геометрической прогрессии равна её первому члену, умноженному на 7, а сумма первого, восьмого и пятнадцатого равна 15. Найти сумму первых 21 членов этой прогрессии.

3(4). (МГУ, 2001, химфак). Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно утроенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 3a_1, a_3 = 3(a_1+a_2)$ и т. д. Найти произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

4(4). (МГУ, 2005, биофак) Задана функция f, причем

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Найдите $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, если известно, что $f(4)=16$.

5(4). Последовательность чисел Фибоначчи задается рекуррентно: $x_1=x_2=1;\ x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\ n=1, 2, 3, \ldots$. Найдите формулу общего члена.

6(4). Пусть последовательность для $n=1, 2, 3, \ldots$. задана рекуррентно:

$x_1=2, x_2=8,\ x_{n+2}=4x_{n+1}-3x_n,\ n=1,2,\ldots$. Найдите формулу общего члена.

7(4). Последовательность x_n задана рекуррентно: $x_1=a;$ $x_2=b;\ x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2}),\ n=3,4,\ldots$. Найдите формулу общего члена.

8(4). Пусть последовательность для $n=1, 2, 3, \ldots$. задана рекуррентно:

$x_1=a_1, x_2=a_2,\ x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n-1,\ n=1,2,\ldots$. Найдите формулу общего члена.

9(4). Пусть последовательность для $n=1, 2, 3, \ldots$. задана рекуррентно: $a_{n+1}=a_n+bn$. Найдите формулу общего члена.

10(4). Пусть последовательность для $n=1, 2, 3, \ldots$. задана рекуррентно: $a_{n+1}=a_n+8n,\ a_1=1$. Найдите формулу общего члена.

11(2). Постройте эскиз графика функции $y=\dfrac{3x-1}{4x+1}$.

12(3). Постройте эскиз графика функции $y=\dfrac{5-|x|}{3+2x}$.

13(3). Постройте эскиз графика функции $y=\left|\dfrac{11x-2}{4x-1}\right|$.

Задачи

Найти пределы последовательностей (1-4)

1(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+13}{7n^2+2n-7}$.

2(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2-1}-\dfrac{n^2}{n+1}\right).$

3(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-6n+17}-2n\right).$

4(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+6+14+...+(5n-4)}{n^2-13}.$

Найти пределы функций (5-9)

5(2). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2+4x-20}.$

6(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^3+8\sqrt{x}-111}{27x^3-3x^2-4x}.$

7(3). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-1}{\sqrt{25x^2-144x+27}}.$

8(3). $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{81x^2-13x+28}-9x.$

9(3). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{27x-15}{\sqrt{9x^2-113x+124}}.$

10(4). Найдите все асимптоты функции $y=\dfrac{(x^2+12)(2-3x)}{x^2}$. Если сумеете, построить *эскиз* графика функции $y=\dfrac{(x^2+12)(2-3x)}{x^2}$, то (6).

11(4). Найдите все асимптоты функции $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$. Если сумеете построить *эскиз* графика функции $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, то (6).

12(3). Найдите все асимптоты функции $y=\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$. Если сумеете построить *эскиз* графика функции $y=\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}$, то (6).

Литература:

Журнал «ПОТЕНЦИАЛ» №10 и №11, 2005г. «Слово о последовательности».

