§ 10. Построение эскизов графиков функций

Пример 12. Построить график функции $y=\dfrac{3x+1}{5x-7}$. График дробно -

линейной функции всегда гипербола. Чтобы узнать, как она расположена в плоскости, надо выделить целую часть, а потом обычную гиперболу передвинуть вверх или вниз, вправо или влево. Для эскиза неважно, сжата она или нет. Но, если вы хотите построить ее поточнее, можно найти значение в нескольких «хороших» точках. Посмотрите, как можно выделить целую часть :

$$y=\frac{3x+1}{5x-7}=\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{5\left(x-\frac{7}{5}\right)}=\frac{3\left(x-\frac{7}{5}+\frac{7}{5}+\frac{1}{3}\right)}{5\left(x-\frac{7}{5}\right)}=\frac{3\left(x-\frac{7}{5}\right)+\frac{21}{5}+1}{5\left(x-\frac{7}{5}\right)}=\frac{3}{5}+\frac{26}{25\left(x-\frac{7}{5}\right)}.$$

Видно, что вертикальная асимптота $x=\frac{7}{5}$, горизонтальная - $y=\frac{3}{5}$.

Пример 2. Построить график функции $y=x^3-3x$.

Функция $y=x^3-3x=x\left(x^2-3\right)$ нечетна и обращается в ноль в точках $x=0$, $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$. Если перепишем функцию в виде $y=x^3-3x=x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)$, то увидим, что

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)=$$

$$=-\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$$

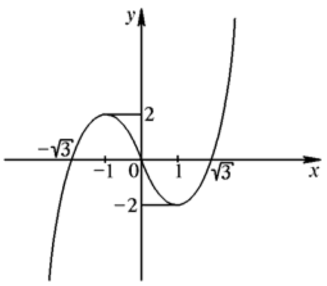

Рис. 6

и при $x\to\infty$ она ведет себя как $y=x^3$, т. к. $y=x^3-3x=x^3\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\approx x^3$. Теперь можно нарисовать эскиз графика этой функции (рис. 6).

Пример 3. Построить график функции $y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. В данном примере график построится проще, если мы сделаем замену переменных: $x-2=t \Leftrightarrow x=t+2$, тогда

$$y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}=\frac{(t+1)^3}{t^2}.$$

Функция $y = \dfrac{(t+1)^3}{t^2}$ определена при $t \neq 0$, обращается в нуль при $t = -1$. Применяя метод интервалов, легко заметить, что $f(t) > 0$ при $t \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ и $f(t) < 0$ при $t \in (-\infty; -1)$.

Ясно, что $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \infty$, поэтому график имеет вертикальную асимптоту $t = 0$, но для построения графика этого мало: необходимо знать, в какую «бесконечность» уходит график. Поэтому уточним, что $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = +\infty$ - значит, график «уходит» сколь угодно далеко вверх.

Далее, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \infty$ - значит, может быть наклонная асимптота. Но здесь тоже очень важно, в какую «бесконечность» уходит график при $t \to +\infty$ и в какую при $t \to -\infty$. Поэтому эти пределы надо находить отдельно. В нашем случае (это имеет место всегда, если числитель и знаменатель – многочлены, а степень числителя на 1 больше степени знаменателя) удобно выделить целую часть дроби:

$$y = \frac{(t+1)^3}{t^2} = \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} = t + 3 + \frac{3t+1}{t^2}.$$

Сразу видно, что $\lim\limits_{t \to -\infty} y = t + 3 + \dfrac{3t+1}{t^2} = -\infty$, а

$\lim\limits_{t \to +\infty} y = t + 3 + \dfrac{3t+1}{t^2} = +\infty$.

Замечательно, что при таком представлении функции *не надо* специально находить коэффициенты для асимптоты – асимптота сама «падает» нам в руки: это прямая $y = t + 3$, т. к. остальная часть в выражении для $y(t)$ стремится к 0 при $t \to \infty$, что соответствует определению наклонной асимптоты. Мало этого, из формулы следует, что $y - (t+3) = \dfrac{3t+1}{t^2} < 0$ при $t \to -\infty$, т. е. график функции при $t \to -\infty$ находится *под* асимптотой, а

$y - (t+3) = \dfrac{3t+1}{t^2} > 0$ при $t \to +\infty$, т. е. здесь график функции при $t \to +\infty$

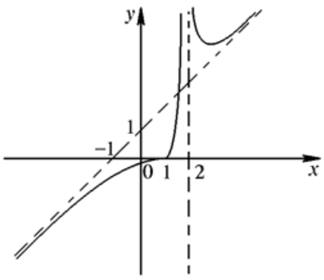

Рис. 7

находится *над* асимптотой.

Теперь мы можем нарисовать эскиз графика (рис. 7).

Из эскиза ясно, что при $t > 0,$ где - то есть точка локального минимума, но она находится с помощью производной. Наш график – это только эскиз.

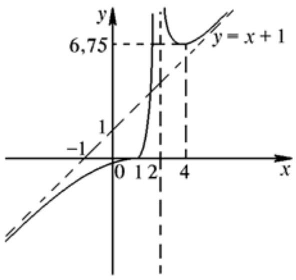

Рис. 8

Для более точного построения графика можно найти значения функции еще в нескольких точках. Но при выполнении данного задания это делать не обязательно. Нас интересует общий вид графика, а не построение его с очень большой точностью. Еще раз напомним, что «интересными» точками являются точки, в которых функция не является непрерывной, точки пересечения графика с осями, поведение в окрестности ∞.

При окончательном построении графика допускаются искажения масштаба там, где это не влияет на общий вид графика и делает рисунок более компактным.

Пример 4. Построить график функции $y = x + \sqrt{x^2 - 2x}.$

Решение. Функция определена при $x \in (-\infty;\, 0] \cup [2;\, +\infty).$

Если $x \geq 2$, то легко видеть, что $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ при $x = 0,$ а при всех $x < 0$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. В самом деле, неравенство $x + \sqrt{x^2 - 2x} > 0$ равносильно неравенству $\sqrt{x^2 - 2x} > -x;$ обе части последнего неравенства при $x < 0$ положительны, и после возведения их в квадрат получится равносильное неравенство $x^2 - 2x > x^2$, справедливое при $x < 0.$

При $x \to +\infty$ график имеет наклонную асимптоту $y = 2x - 1,$ причем, график находится *под* асимптотой, т. к.

$$y - (2x - 1) = \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1 = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} + 1 =$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} + 1 = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2x}{\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x\right)^2} < 0.$$

При $x \to -\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ (пример 2 из §4), причем

$$y - 1 = x + \sqrt{x^2 - 2x} - 1 = \sqrt{x^2 - 2x} - (1 - x) =$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x} - (1 - x)\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} + (1 - x)\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 2x} + (1 - x)\right)} = \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2 - 2x} + (1 - x)\right)} < 0$$

при любом $x \le 0$, т. е. опять график лежит ниже асимптоты.

В рассмотренном примере точки $x = 0$ и $x = 2$ являются граничными точками области определения. При $x \to -0$ функция ведет себя примерно так:

$y = x + \sqrt{x(x-2)} \approx x + \sqrt{-2x} \approx \sqrt{-2x}$, а при $x \to 2 + 0$ функция ведет себя примерно так: $y = x + \sqrt{x(x-2)} \approx 2 + \sqrt{2(x-2)}$.

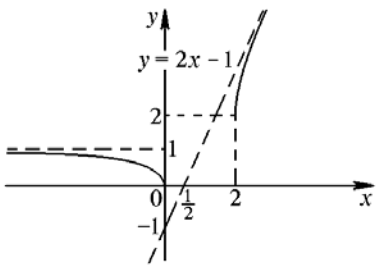

Рис. 9

Теперь можно нарисовать эскиз графика (рис. 9).