§7. Понятие о пределе функции

Одним из стандартных определений предела функции, принятых в математическом анализе, является следующее (так называемое, определение по Гейне).

Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке *а*, если для *любой* последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Это определение символически выражается записью $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$. В определении предела рассматриваются значения x_n, не равные *а*, поэтому в самой точке *а* функция $f(x)$ может не быть определена; если значение $f(a)$ определено, то оно не обязано совпадать с b.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Доказательство. Функция $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена при $x = 1,$ но при $x_n \neq 1$ имеет место равенство $f(x_n) = x_n + 1$. Значит, если $x_n \neq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2.$

По определению предела функции, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2.$

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке *а* справа (обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$), если для любой последовательности x_n такой, что $x_n > a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке *а* слева (обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$), если для любой последовательности x_n такой, что $x_n < a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b.$

Пример 2. Найти пределы справа и слева в точке 0 функции

$$\mathrm{sign}x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0; \\ 0, \text{ если } x = 0; \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Решение. Для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, выполняется равенство $\operatorname{sign} x_n = 1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$. Для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n < 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, выполняется равенство $\operatorname{sign} x_n = -1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$.

При рассмотрении многих вопросов (например, при построении графиков) возникает понятие предела функции при $x \to \infty$ (применяется запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$). Говорят, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Аналогично определяются записи $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$. Можно определить также понятие бесконечно большого предела функции. Например, говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \neq a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. Говорят, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Аналогично можно определить, что значит $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ и т. д.

Можно доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sign} x$ не существует.

