§6. Понятие о пределе последовательности

В курсе алгебры и начал анализа 10 – 11 классов важную роль играет понятие производной. Производная определяется при помощи понятия предела функции, которое в обязательной школьной программе фактически отсутствует (не определяется аккуратно). Мы приведем схему построения теории пределов последовательностей и функций (без доказательств).

При рассмотрении последовательности любой ее элемент с конкретным номером можно нанести на числовую ось, но невозможно в общем случае нанести на числовую ось *все* элементы последовательности. Однако возникает вопрос – нельзя ли что – нибудь определенное сказать, где расположены *все* элементы последовательности. Например, у последовательности $x_n=(-1)^n$ элементы с четными номерами расположены в точке $x=1$, а элементы с нечетными номерами расположены в точке $x=-1$; у последовательности $a_n=(-1)^n n$ элементы «разбегаются» сколь угодно далеко по оси вправо и влево; элементы последовательности $b_n=n$ «бегут» только вправо; про то, где расположены *все* элементы последовательности $c_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(c_n+\dfrac{2}{c_n}\right)$ сразу ничего сказать нельзя. Чтобы ответить на вопрос, где расположены *все* элементы последовательности, вводится понятие *предела* последовательности.

Интервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется ε - окрестностью точки a.

Символ ∞, конечно, не точка и не число. Но в последнее время все чаще встречаются понятия окрестности ∞, окрестности $(+\infty)$, окрестности $(-\infty)$. Под ε - окрестностью $(+\infty)$ понимается интервал $(\varepsilon;+\infty)$, под ε - окрестностью $(-\infty)$ понимается интервал $(-\infty;\varepsilon)$, а под ε - окрестностью ∞ понимается объединение интервалов $(-\infty;\varepsilon)$ и $(\varepsilon;+\infty)$.

Предел числовой последовательности можно определить следующим образом.

Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε - окрестности точки a лежат все члены последовательности с номерами, начиная с некоторого числа, которое обычно обозначается как N+1. Это означает, что в любой ε -окрестности точки a лежат *все* члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением, быть может, *конечного* их числа (вне ε - окрестности могут находиться члены с номерами 1,2, …, N или некоторые из них).

Иначе говоря, число *a* является пределом последовательности x_n, если вне любой окрестности точки *a* находится не более конечного числа членов x_n. Отсюда следует, что изменение конечного числа членов последовательности не влияет ни на факт существования предела, ни на величину последнего. При этом несущественно также, определены ли члены последовательности при всех $n \geq 1$ или же начиная с некоторого номера n_0.

Тот факт, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел *a*, записывается символически так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая конечный предел (*число a*), называется *сходящейся*; последовательность, не имеющая *конечного* предела, называется *расходящейся*.

Теорема (о единственности предела).

Если последовательность имеет предел, то он только один.

◆ Допустим, что пределов два: *a* и *b*, $b > a$. Рассмотрим ε - окрестности этих точек, где ε =(*b*-*a*)/3. Эти окрестности не пересекаются, и, по условию, в каждой находятся *все* члены последовательности x_n, за исключением, быть может, *конечного* их числа, что невозможно. ◆

Последовательность, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой*. Последовательность x_n называется *бесконечно большой*, если последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ является бесконечно малой. Для бесконечно больших последовательностей применяется запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Одновременно это означает, что в любой ε - окрестности ∞ лежат *все* члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением *конечного* их числа.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если в любой ε - окрестности $(+\infty)$ лежат *все* члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением *конечного* их числа.

Говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если в любой ε - окрестности ($-\infty$) лежат *все* члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением *конечного* их числа.

При любых $\alpha > 0$ и любых $q > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$. Если же $q < -1$, то последовательность q^n бесконечно большая, но знак ее все время меняется, поэтому неверно ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, ни то, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = -\infty$, в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Доказательство. Точка $x_n = \frac{1}{n}$ принадлежит ε – окрестности точки $a = 0$ в том и только в том случае, когда $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, т. е. при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (следовательно, для всех n, кроме конечного числа значений).

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

При вычислении пределов на практике редко пользуются определением предела. Обычно применяют некоторые стандартные (доказанные в теоретических курсах) предельные равенства, например:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0, \text{ если } a > 0; \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1 \qquad (1)$$

и т. д., а также различные теоремы о пределах.

Сформулируем теоремы об арифметических операциях с пределами.

Если последовательности $\{x_n\}$, и $\{y_n\}$ *сходятся*, то сходятся и последовательности $\{\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ (в последнем случае надо требовать, чтобы $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$). При этом

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n;$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n; \ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+2}{n^2+2}$.

Решение. В этом примере теорема о пределе частного неприменима, т. к. пределы числителя и знаменателя не существуют: и числитель и знаменатель стремятся к ∞ при $n\to\infty$. В таком случае сначала надо вынести x в старшей степени в числителе и знаменателе, сократить общую степень, а затем попробовать применить теоремы:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+2}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}=\frac{2-3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2-3\cdot 0+2\cdot 0}{1+2\cdot 0}=2.$$

Геометрическая прогрессия $\{x_n\}$ называется *бесконечно убывающей*, если $|q|<1$ (q – знаменатель прогрессии). *Суммой* бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где S_n – сумма ее первых n членов. Известно, что $S_n=x_1\dfrac{q^n-1}{q-1}=\dfrac{x_1}{q-1}q^n+\dfrac{x_1}{1-q}$; поэтому сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{x_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}q^n+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{q-1}\cdot 0+\frac{x_1}{1-q}=\frac{x_1}{1-q}.$$

Пример 3. Последовательность x_n задана рекуррентно: $x_1=a$; $x_2=b$; $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$, $n=3,4,\ldots$. Доказать, что последовательность сходится и найти ее предел.

Решение. Из примера 2 следует, что $x_n=\dfrac{a+2b}{3}+\dfrac{4(b-a)}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{a+2b}{3}$.