§ 5. Последовательность, заданная рекуррентным линейным однородным соотношением

$$x_1 = a;\ x_2 = b;\ x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n,\ n = 1, 2, \dots\ .$$

Пусть последовательность для $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ задана рекуррентно:

$$x_1 = a;\ x_2 = b;\ x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n,\ n = 1, 2, \dots .$$

Такого типа соотношения называются линейными однородными соотношениями.

Прежде всего обратим внимание на то, что они обладают следующими двумя свойствами (свойствами линейности).

1. Если последовательности y_n и z_n удовлетворяют однородному линейному рекуррентному соотношению, т. е. $y_{n+2} - cy_{n+1} - dy_n \equiv 0$ и $z_{n+2} - cz_{n+1} - dz_n \equiv 0$, то и сумма $y_n + z_n$ удовлетворяет этому соотношению.

♦Действительно, подставим $(y_n + z_n)$ в соотношение $x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n$:

$$(y_{n+2} + z_{n+2}) - c(y_{n+1} + z_{n+1}) - d(y_n + z_n) \equiv (y_{n+2} - cy_{n+1} - dy_n) +$$
$$+ (z_{n+2} - cz_{n+1} - dz_n) \equiv 0.\ ♦$$

2. Если последовательность x_n удовлетворяет однородному линейному рекуррентному соотношению, то при любом A последовательность $y_n = Ax_n$ тоже удовлетворяет этому соотношению.

♦Действительно, подставим $y_n = Ax_n$ в соотношение $x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n$:

$$(Ax_{n+2}) - c(Ax_{n+1}) - d(Ax_n) = A\ (x_{n+2} - cx_{n+1} - dx_n) \equiv 0\ .♦$$

Пусть последовательность для $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ задана рекуррентно: $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n$. Тогда, в зависимости от заданных c и d, всегда можно найти формулу общего члена.

Пусть последовательности для $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ задана рекуррентно:

$$x_1 = a;\ x_2 = b;\ x_{n+2} = cx_{n+1} + dx_n,\ n = 1, 2, \dots .$$

Придется рассмотреть три возможности – леммы 4, 5.

Лемма 4. Если $c^2+4d>0$, то формулу общего члена последовательности $x_1=a;\ x_2=b;\ x_{n+2}=cx_{n+1}+dx_n,\ n=1,2,\dots$.
всегда можно привести к виду $x_n=Aq_1^n+Bq_2^n$, где $q_i,\ i=1,2-$ различные корни характеристического уравнения $q^2-cq-d=0$, а A,B определяются заданными “начальными условиями” $x_1=a, x_2=b$.

♦Будем искать решение рекуррентного соотношения в виде $x_n=q^n$. Подставим это x_n в рекуррентное соотношение:

$$q^{n+2}=cq^{n+1}+dq^n \Leftrightarrow q^2=cq+d \Leftrightarrow q^2-cq-d=0.$$

Если $c^2+4d>0$, то уравнение $q^2-cq-d=0$ имеет два различных решения q_1 и q_2. Тогда $x_n=Aq_1^n+Bq_2^n$, в силу свойств 1 и 2, тоже будет решением. Определим A,B:

$$\begin{cases} x_1=Aq_1+Bq_2, \\ x_2=Aq_1^2+Bq_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{x_1q_2^2-x_2q_2}{q_1q_2\left(q_2-q_1\right)}, \\ B=\dfrac{x_2q_1-x_1q_1^2}{q_1q_2\left(q_2-q_1\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{aq_2^2-bq_2}{q_1q_2\left(q_2-q_1\right)}, \\ B=\dfrac{bq_1-aq_1^2}{q_1q_2\left(q_2-q_1\right)} \end{cases}.♦$$

Замечание. Точно так же в виде $x_n=q^n$ ищется решение рекуррентных соотношений вида

$$x_1=a_1, x_2=a_2,\dots,x_k=a_k,\quad x_{n+k}=b_1x_n+b_2x_{n+1}+\dots+b_kx_{n+k-1},\ n=1,2,\dots.$$

В зависимости от корней характеристического уравнения получаем соответствующее решение.

Лемма 5. Если $c^2+4d=0$, то формулу общего члена последовательности $x_1=a;\ x_2=b;\ x_{n+2}=cx_{n+1}+dx_n,\ n=1,2,\dots$. всегда можно привести к виду $x_n=q^n(A+Bn)$,
где q - единственный корень (кратности 2) характеристического уравнения $q^2-cq-d=0$, а A,B определяются заданными “начальными условиями” $x_1=a, x_2=b$.

♦Будем искать решение рекуррентного соотношения в виде $x_n=q^n$. Подставим это x_n в рекуррентное соотношение:

$q^{n+2} = cq^{n+1} + dq^n \Leftrightarrow q^2 = cq + d \Leftrightarrow q^2 - cq - d = 0$. Так как, по условию, $c^2 + 4d = 0$, то уравнение $q^2 - cq - d = 0$ имеет два одинаковых решения $q_1 = q_2 = \frac{c}{2}$ (один корень кратности 2). Обозначим единственный корень буквой q и покажем, что nq^n тоже является решением рекуррентного соотношения. Подставим nq^n в соотношение:

$$(n+2)q^{n+2} = c(n+1)q^{n+1} + dnq^n \Leftrightarrow (n+2)q^2 = c(n+1)q + dn \Leftrightarrow$$

$$n\left(q^2 - cq - d\right)n + 2q^2 - cq = 0 \Leftrightarrow n\left(q^2 - cq - d\right)n + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 - c\left(\frac{c}{2}\right) \equiv 0.$$

Определим A, B:

$$\begin{cases} x_1 = q(A+B) \\ x_2 = q^2(A + B\cdot 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 q = q^2(A+B) \\ x_2 - x_1 q = Bq^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2x_1 q - x_2}{q^2} \\ B = \dfrac{x_2 - qx_1}{q^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{2aq - b}{q^2} \\ B = \dfrac{b - aq}{q^2}. \end{cases}$$ Отсюда следует, что $x_n = q^n\left(\frac{2aq - b}{q^2} + \frac{b - aq}{q^2}n\right)$, $q = \frac{c}{2}$. Утверждение доказано.

Если $c^2 + 4d < 0$, то уравнение $q^2 - cq - d = 0$ не имеет действительных решений.

Этот случай сейчас мы рассматривать не будем.

Пример 3. Последовательность x_n задана рекуррентно:

$x_1 = a;\ x_2 = b;\ x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right),\ n = 3,4,\ldots$. Найдите формулу общего члена.

♦ **Первый способ**

Найдем формулу общего члена по члена по общим правилам для линнейных однородных рекуррентных соотношений: будем искать x_n в виде $x_n = \lambda^n$. Подставляем x_n в соотношение:

$$\lambda^n = \frac{1}{2}\left(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\right) \Leftrightarrow \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}(\lambda+1)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \left[\begin{array}{l} 1; \\ -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$ Отсюда следует, что $x_n = c \cdot 1^n + d\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Найдем c, d, исходя из заданных x_1 x_2:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d\left(-\frac{1}{2}\right) = a, \\ c + \frac{d}{4} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{4}{3}(b-a), \\ c = \frac{a+2b}{3}. \end{cases}$$

Поэтому $x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Второй способ

Рассмотрим разность $x_n - x_{n-1}$:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right) - x_{n-1} \equiv \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{2} \equiv -\frac{1}{2}\left(x_{n-1} - x_{n-2}\right).$$

Подставляя в правую часть полученного равенства вместо n номера $n-1, n-2, \ldots$, получим:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}\left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(x_{n-2} - x_{n-3}\right) = \ldots =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(x_2 - x_1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a).$$

Поэтому

$$x_n = a + \left(x_n - a\right) = a + \left(x_n - x_{n-1}\right) + \left(x_{n-1} - x_{n-2}\right) + \ldots + \left(x_2 + x_1\right) =$$

$$= a + (b-a)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \ldots + 1\right) = a + (b-a)\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} =$$

$$= a - 2(b-a)\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{3} = a - 2(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2(b-a)}{3} =$$

$$-2(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2b-2a+3a}{3} = 4(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{a+2b}{3}.$$

Итак, формула общего члена заданной рекуррентно последовательности имеет вид $x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Ответ: $\frac{a+2b}{3} + \frac{4(b-a)}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ **.** ♦

Пример 4. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1},\ n \geq 2$. Найдите формулу общего члена последовательности.

♦Найдем формулу общего члена по члена по общим правилам для линейных однородных рекуррентных соотношений: будем искать x_n в виде $x_n = q^n$. Подставляем x_n в заданное соотношение:

$q^{n+1} = 2q^n - q^{n-1} \Leftrightarrow q^2 - 2q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = 1$. Отсюда следует, что $a_n = 1^n(A + Bn)$. Найдем $A,\ \ B$, исходя из заданных $x_1,\ x_2$:

$$\begin{cases} a_1 = (A+B), \\ a_2 = A + 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = (A+B), \\ b = A + 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = b - a, \\ A = 2a - b. \end{cases}$$

Тогда $a_n = \left(2a - b + (b-a)n\right) \equiv \left(a + a - b + (b-a)n\right) \equiv$

$\equiv a + (b-a)(n-1)$, т. е. $a_n = a + (b-a)(n-1)$.

Но ведь это арифметическая прогрессия! Действительно, $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} \Leftrightarrow x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}$.

Ответ: $a + (b-a)(n-1)$.♦

Рекуррентное соотношение может не задавать последовательности. Например, если $x_1 = \frac{2}{3},\ x_{n+1} = \frac{1 - x_n}{x_n},\ n = 1,2,3,\ldots$, то $x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1$, $x_4 = 0$, и все члены, начиная с пятого, не определены.

