§ 4. “ Решение ” некоторых рекуррентных соотношений

Последовательность вида $x_1 = a,\ x_{n+1} = bx_n + c$ **.**

Лемма 3. Пусть последовательность для $n = 1, 2, 3, \ldots$. задана рекуррентно: $x_1 = a,\ x_{n+1} = bx_n + c$, $b \neq 1$.

Тогда формулу общего члена всегда можно привести к виду

$$x_n = \left(a - \frac{c}{1-b}\right) b^{n-1} + \frac{c}{1-b}.$$

Если $b = 1$, то последовательность является арифметической прогрессией.

Если $c = 0$, то последовательность является геометрической прогрессией.

Интерес представляет случай, когда $b \neq 1$, $c \neq 0$. Любопытно, что тогда последовательность может быть сведена к некоторой *геометрической* прогрессии.

♦Преобразуем рекуррентное соотношение (добавим и вычтем некоторое пока произвольное число d):

$$x_{n+1} - d = b(x_n - d + d) + c - d \Leftrightarrow (x_{n+1} - d) = b(x_n - d) + c + bd - d.$$

При заданных b и c всегда можно подобрать такое d, что $bd + c - d = 0$: $bd + c - d = 0 \Leftrightarrow d = \dfrac{c}{(1-b)}$. Тогда последовательность $\left\{x_n - \dfrac{c}{1-b}\right\}$ будет геометрической прогрессией со знаменателем $q = b$, т. е. $x_{n+1} - d = b(x_n - d)$. Отсюда следует, что $\left(x_n - \dfrac{c}{1-b}\right) = \left(x_1 - \dfrac{c}{1-b}\right)b^{n-1} \Leftrightarrow x_n = \left(a - \dfrac{c}{1-b}\right)b^{n-1} + \dfrac{c}{1-b}$, что и требовалось доказать. ♦

Пример 2. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентно: $x_1 = 1; x_{n+1} = 3x_n + 1, n = 1, 2, 3, \ldots$.

Решение. Перепишем соотношение в виде

$$x_{n+1} = 3x_n + 1 \Leftrightarrow x_{n+1} - a + a = 3(x_n - a + a) + 1 \Leftrightarrow x_{n+1} - a = 3(x_n - a) + 1 + 2a.$$

Выберем число a так, чтобы последовательность x_n была геометрической прогрессией, т. е. $a = -\dfrac{1}{2}$ и $x_{n+1} + \dfrac{1}{2} = 3\left(x_n + \dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_n + \frac{1}{2} = 3^{n-1}\left(x_1 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_n = -\frac{1}{2} + 3^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3^n - 1}{2}$.