Дорогие десятиклассники!

Содержание этого задания, быть может, выйдет за рамки обычной школьной программы, но оно очень важно для понимания всего дальнейшего материала, изучаемого в школе. Внимательно изучите текст.

§1. Бесконечные последовательности. Арифметическая прогрессия. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x. Это значит, что на множестве N натуральных чисел задана числовая функция $x = x(n)$; эта функция называется *бесконечной числовой последовательностью*. Аргумент n этой функции записывается в виде индекса, т. е. вместо записи $x(n)$ чаще всего употребляется запись x_n. Иногда последовательность задается не на всем множестве N, а на некотором конечном подмножестве. Тогда говорят о *конечной* последовательности.

Приведем примеры.

(I) 1; 1; 1; … (т. е. $x_n = 1$ для всех n);

(II) 1; 2; 4; 8; … (т. е. $x_n = 2^{n-1}$);

(III) последовательность, n-й член которой равен n-му знаку после запятой в десятичной записи числа $\dfrac{8}{33}$;

(IV) то же для числа π;

(V) последовательность, n-й член которой равен количеству простых чисел, не превосходящих n;

(VI) последовательность, n-й член которой равен площади правильного треугольника со стороной n.

Иногда вместо множества N всех натуральных чисел бывает удобно в качестве области определения последовательности рассматривать множество всех целых чисел n таких, что $n \geq n_0$, где n_0 – фиксированное целое число (при $n_0 = 1$ получаем множество $\mathbb{N}$). Последовательность (II) удобно записать так: $x_n = 2^n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; последовательность $x_n = \dfrac{1}{n-1}$ имеет смысл рассматривать при $n \geq 2$, а последовательность $x_n = \sqrt{n+2}$ можно рассматривать при $n \geq -2$. Легко убедиться, что в примере (III) $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 4$ и т. д., т. е. $x_n = 3 + (-1)^n, n \geq 1$. Ясно также, что в примере (VI) $x_n = \frac{\sqrt{3}}{4} n^2$. А вот явные формулы для общего члена последовательностей (IV) и (V) написать невозможно. Тем не менее, многие свойства этих последовательностей установлены и без формул. Таким образом, явное задание формулы общего члена не является необходимым для изучения свойств последовательности.

И все же, при любом задании последовательности в первую очередь возникает вопрос, нельзя ли выписать явно формулу общего члена. Особенно часто такой вопрос возникает, когда последовательность задана рекуррентно, т. е. даны несколько первых членов последовательности и формула, выражающая последующие члены через предыдущие. Рассмотрим примеры таких последовательностей.

