§6. Применение производной к построению графиков функций

В §4 задания №3 были приведены определения монотонных функций, а также определения точек локального экстремума.

В курсах математического анализа доказываются следующие утверждения:

1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)>0$. Тогда $f(x)$ возрастает на (a,b).

2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)<0$. Тогда $f(x)$ убывает на (a,b).

3. (Необходимое условие экстремума). Пусть x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$. Тогда $f'(x_0)$ равна 0 или не существует вовсе.

Например, для функций $y=x^2$ и $y=|x|$ точка 0 – точка локального минимума. Производная функции $y=x^2$ в точке 0 равна 0; производная функции $y=|x|$ в точке 0 не существует.

Обращение производной в ноль (или отсутствие производной) не является достаточным условием локального экстремума. Так производная функция $y=x^3$ в точке 0 равна 0, а функция эта возрастает на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, и точка 0 не является точкой локального экс-
тремума. Сформулируем достаточные условия экстремума.

4. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем при некотором $\varepsilon>0$ на интервале $(x_0-\varepsilon;\, x_0)$ существует положительная $f'(x)$, а на интервале $(x_0;\, x_0+\varepsilon)$ существует отрицательная $f'(x)$. Тогда x_0 - точка локального максимума функции $f(x)$.

5. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причем при некотором $\varepsilon>0$ на интервале $(x_0-\varepsilon;\, x_0)$ существует отрицательная $f'(x)$, а на интервале $(x_0;\, x_0+\varepsilon)$ существует положительная $f'(x)$. Тогда x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$.

Образно говоря, если при прохождении точки производная меняет знак с «+» на «–», т. е. возрастание сменяется убыванием, то в этой точке локальный максимум. Если же при прохождении точки производная меняет знак с «–» на «+», т. е. убывание сменяется возрастанием, то в этой точке локальный минимум.

Отметим, что существование $f'(x_0)$ в утверждениях 4 и 5 не требуется. Так, функция $y=x^2$ и $y=|x|$ удовлетворяют в точке $x_0=0$ достаточному условию локального минимума (утверждение 5), но для первой из них $f'(0)=0$, а для второй $f'(0)$ не существует.

Исследуем на монотонность и экстремумы функцию $y=x^3-3x$. Так как $y'=3(x^2-1)$, то $y'<0$ при $x\in(-1;1)$; $y'>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Поэтому функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ (на каждом из двух интервалов в отдельности, но не на их объединении!), убывает на интервале $(-1;1)$. Далее, $y'=0$ в точках $x=1$ и $x=-1$. Слева от точки $x=-1$ производная $y'>0$, справа $y'<0$. Поэтому $x=-1$ - точка локального максимума. Слева от точки $x=1$ производная $y'<0$, справа $y'>0$. Поэтому $x=1$ - точка локального минимума. Зная теперь, что функция $y=x^3-3x$ нечетна и обращается в ноль в точках $x=0$, $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$, можно, вычислив $f(1)=-2$ и $f(-1)=2$, с достаточной точностью нарисовать график этой функции (рис. 11).

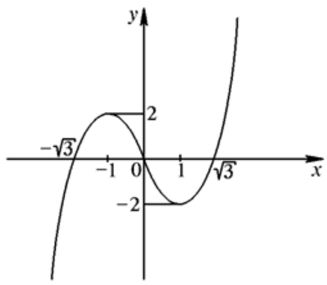

Рис. 11

На примере функции $y=x^3-3x$ хорошо видно, что локальные максимум и минимум не обязаны быть наибольшим и наименьшим значениями функции на всей области определения.

Приведем примеры построения более сложных графиков.

Пример 1. Построить график функции $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. Функция определена при $x\neq 2$, обращается в нуль при $x=1$. Применяя метод интервалов, легко заметить, что $f(x)>0$ при $x\in(1;2)\cup(2;+\infty)$; $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;1)$. График имеет вертикальную асимптоту $x=2$ и наклонную асимптоту $y=x+1$ при $x\to\infty$ (см. пример 1 из §4). Вычислив значение $f(0)=-\dfrac{1}{4}$, мы можем нарисовать теперь эскиз графика (рис. 12).

Конечно, это только эскиз. Многое требует уточнений. Например, из геометрических соображений ясно, что на луче $(2;+\infty)$ функция имеет локальный минимум.

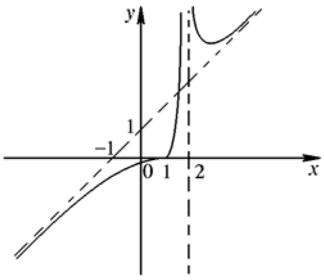

Рис. 12

Для определения координат этой точки вычислим производную данной функции. Имеем:

$$y' = \frac{(x-2)^2 3(x-1)^2 - (x-1)^3 2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)^2[3(x-2)-2(x-1)]}{(x-2)^3} = \frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}.$$

Применяя метод интервалов, построим таблицу изменения знака y' на всей области определения функции:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;4)$	4	$(4;+\infty)$
y	+	0	+	///////	–	0	+

Отсюда видно, что функция возрастает на интервалах $(-\infty;1)$, $(1;2)$ и $(4;+\infty)$, убывает на интервале $(2;4)$. При $x=1$ производная обращается в нуль, но при прохождении этой точки знак производной не меняется. Возрастание сменяется опять-таки возрастанием, и точка $x=1$ не является точкой локального экстремума. Таким образом, можно говорить о возрастании функции на всем интервале $(-\infty;2)$.

Из таблицы ясно также, что точкой локального минимума является точка $x=4$. Ордината этой точки равна $\frac{27}{4}$. Для общего вида графика важно также, что в точке $x=1$ касательная к графику функции горизонтальна (на эскизе графика – рис. 12 – этого не видно). Используя полученные данные, можно окончательно вычертить график (рис. 13).

Отметим, что аппарат производной мы применили не сразу, а лишь после того, как были найдены область определения функции, интервалы знакопостоянства, точки пересечения с осями, асимптоты, построен черновой график. Таким образом, производная – это не орудие построения графика, а орудие шлифовки графика, предварительно построенного из более простых соображений.

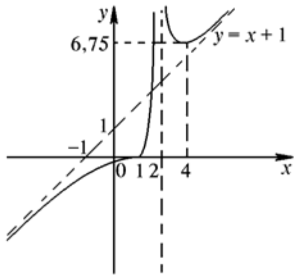

Рис. 13

Для более точного построения графика можно найти значения функции еще в нескольких точках. Но при выполнении данного задания это делать не обязательно. Нас интересует общий вид графика, а не построение его с очень большой точностью. Еще раз напомним, что «интересными» точками являются точки, в которых функция не является непрерывной, точки пересечения графика с осями и точки, где производная обращается в нуль или не существует, значения функции в других точках не нужны. При окончательном построении графика допускаются искажения масштаба там, где это не влияет на общий вид графика и делает рисунок более компактным (например, не будет большим грехом, если ордината точки локального минимума на рис. 13 будет фактически несколько меньше, чем 6,75).

Пример 2. Построить график функции $y = x + \sqrt{x^2 - 2x}$.

Решение. Функция определена при $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. Легко видеть, что $f(x) > 0$ при $x \geq 2$. Далее, $f(x) = 0$ при $x = 0$, а при всех $x < 0$ выполняется неравенство $f(x) > 0$. В самом деле, неравенство $x + \sqrt{x^2 - 2x} > 0$ равносильно неравенству $\sqrt{x^2 - 2x} > -x$; обе части последнего неравенства при $x < 0$ положительны, и после возведения их в квадрат получится равносильное неравенство $x^2 - 2x > x^2$, справедливое при $x < 0$.

При $x \to +\infty$ график имеет наклонную асимптоту $y = 2x - 1$, а при $x \to -\infty$ – горизонтальную асимптоту $y = 1$ (пример 2 из §4). Так как $y - x = \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} < \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$, то при $x \geq 2$ выполняется неравенство $y - x < x - 1$ (т. е. $y < 2x - 1$), а при $x \leq 0$ выполняется неравенство $y - x < 1 - x$, т. е. $y < 1$. Итак, график лежит ниже наклонных асимптот на соответствующих участках области определения функции. Такое исследование проводить не обязательно, но оно облегчает построение чернового графика. Теперь можно нарисовать эскиз графика (рис. 14).

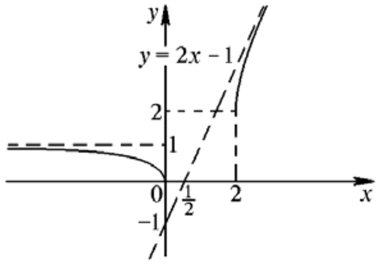

Рис. 14

Для окончательного построения графика вычислим производную. При $x \in (-\infty;\, 0) \cup (2;\, +\infty)$ имеем:

$$f'(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}. \quad (5)$$

Ясно, что $f'(x) > 0$ при $x > 2,$ и на $(2;\, +\infty)$ функция возрастает. При $x < 0$ перепишем равенство (5) в виде $f'(x) = \dfrac{f(x)-1}{\sqrt{x^2-2x}}.$

Мы видели уже, что при $x < 0$ выполняется неравенство $f(x) < 1,$ значит, $f'(x) < 0,$ и на $(-\infty;\, 0)$ функция убывает. «Интересных» точек на $(-\infty;\, 0)$ и на $(2;\, +\infty)$ нет, поэтому строить таблицу изменения знака производной не имеет смысла.

В рассмотренном примере точки $x = 0$ и $x = 2$ являются граничными точками области определения, и важной характеристикой графика являются угловые коэффициенты касательных (односторонних) к графику в этих точках. Из (5) легко заметить, что $\lim\limits_{x\to 2+0} f'(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = -\infty.$ Поэтому в точках $x = 0$ и $x = 2$ график имеет односторонние вертикальные касательные (аккуратные доказательства соответствующих утверждений мы не приводим).

Так как все отмеченные свойства графика фактически отражены на рис. 14, то его можно считать окончательным вариантом графика.