

Вторая часть по планиметрии содержит три параграфа. В § 1 подробно обсуждаются свойства касательных, хорд и секущих, доказывается теорема “о касательной и секущей”. § 2 посвящен вписанным и описанным четырехугольникам, теме, которая практически не рассматривается в учебнике. В § 3 рассматриваются задачи на построение с помощью циркуля и линейки. Этой теме, к сожалению, в школе также мало уделяется внимания, хотя именно в задачах на построение лучше всего усваивается и закрепляется теоретический материал.

В решениях задач § 2 будут применяться теоремы косинусов и синусов, более подробно эти теоремы будут обсуждаться в задании “Планиметрия”, часть III в 10 классе ФЗТШ. Здесь мы только напомним эти теоремы. Для произвольного треугольника, длины сторон которого обозначены a , b , c , а величины противолежащих углов α , β , γ , справедливы две теоремы, утверждения которых можно кратко записать так:

теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

теорема синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Напомним также, что в учебнике доказано, что

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R – радиус окружности, описанной около этого треугольника.

§ 1. Свойства касательных, хорд и секущих

Пусть к окружности с центром в точке O проведены две касательные AM и AN , точки M и N лежат на окружности (рис. 1).

По определению касательной $OM \perp AM$ и $ON \perp AN$. В прямоугольных треугольниках AOM и AON гипотенуза AO общая, катеты OM и ON равны, значит, $\triangle AOM = \triangle AON$. Из равенства этих треугольников следует $AM = AN$ и $\angle MAO = \angle NAO$. Таким образом, если из

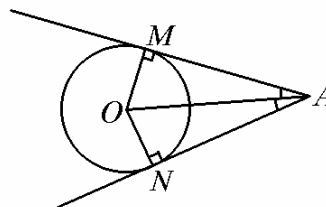


Рис. 1

точки к окружности проведены две касательные, то:

1°. **отрезки касательных от этой точки до точек касания равны;**

2°. **прямая, проходящая через центр окружности и заданную точку, делит угол между касательными пополам.**

Используя свойство 1, легко решим следующие две задачи. (В решении используется тот факт, что в каждый треугольник можно вписать окружность.)

Задача 1. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D , при этом $DA = a$, $DC = b$ (рис. 2). Окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC , касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найти отрезок MN .

▷ Пусть $a > b$. Обозначим $x = MN$,

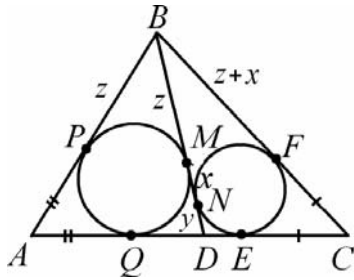


Рис. 2

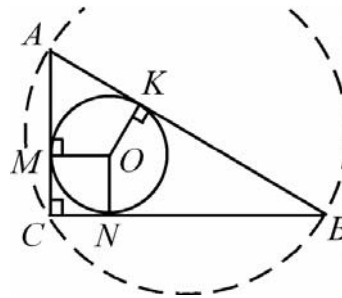


Рис. 3

$y = ND$, $z = BM$. По свойству касательных $DE = y$, $QD = x + y$, $AQ = AP = a - (x + y)$, $CE = CF = b - y$, $BP = z$ и $BF = z + x$. Выразим боковые стороны: $AB = z + a - x - y$, $BC = z + x + b - y$. По условию $AB = BC$, поэтому $z + a - x - y = z + x + b - y$. Отсюда находим $x = (a - b)/2$. Итак, $MN = (a - b)/2$. Если $a < b$, то $MN = (b - a)/2$. Итак, $MN = \frac{1}{2}|a - b|$. ◁

Задача 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна удвоенной сумме радиусов вписанной и описанной окружностей, т.е. $a + b = 2R + 2r$.

▷ Пусть M , N и K – точки касания окружностью сторон прямоугольного треугольника ABC (рис. 3), $AC = b$, $BC = a$, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. Вспомним,

что гипотенуза есть диаметр описанной окружности: $AB = 2R$. Далее, $OM \perp AC$, $BC \perp AC$, значит, $OM \parallel BC$, аналогично $ON \perp BC$, $AC \perp BC$, значит, $ON \parallel AC$. Четырехугольник $MONC$ по определению есть квадрат, все его стороны равны r , поэтому $AM = b - r$ и $BN = a - r$.

По свойству касательных $AK = AM$ и $BK = BN$, поэтому $AB = AK + KB = a + b - 2r$, а т.к. $AB = 2R$, то получаем $a + b = 2R + 2r$. \triangleleft

Напомним, что градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Теорема 1. Мера угла между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине градусной меры дуги, заключенной между его сторонами.

\triangleright Пусть O – центр окружности, AN – касательная (рис. 4). Угол между касательной AN и хордой AB обозначим α . Соединим точки A и B с центром окружности. Так как

$OA \perp AN$, $OA = OB$, то

$\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \alpha$. Сумма углов

треугольника равна 180° , поэтому $\angle AOB = 2\alpha$. Таким образом, градусная мера угла BAN между касательной и хордой равна половине градусной меры дуги AnB , которая заключена между его сторонами. (Аналогичные рассуждения можно провести и для угла MAB .) \triangleleft

Задача 3. Через точку B окружности проведена касательная. Концы хорды AC отстоят от этой касательной на расстоянии 4 см и 9 см. Найти расстояние от точки B до хорды AC .

\triangleright Пусть $AM \perp MN$, $CN \perp MN$, $BD \perp AC$ (рис. 5). Проведем хорды AB и BC .

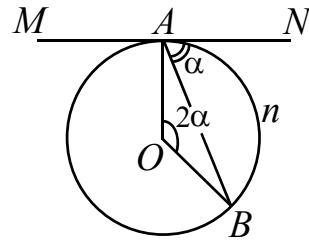


Рис. 4

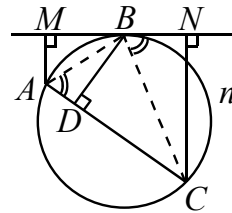


Рис. 5

По условию $AM = 4$ см и $CN = 9$ см. По теореме 1 угол между касательной BN и хордой BC равен половине градусной меры дуги BnC . Вписанный угол BAC опирается на эту же дугу и также равен половине ее градусной меры, поэтому $\angle NBC = \angle BAC$.

Прямоугольные треугольники NBC и DAB имеют по равному острому углу, следовательно, они подобны и

$$CN : BD = BC : AB \quad (1)$$

Аналогично, из равенства углов MBA и BCA следует подобие треугольников MBA и DCB и соотношение

$$AM : BD = AB : BC \quad (2)$$

Перемножим правые и левые части равенств (1) и (2), получим $CN \cdot AM / BD^2 = 1$. Отсюда находим $BD = \sqrt{CN \cdot AM} = 6$ см. \triangleleft

Докажем теорему, обычно называемую “теоремой о касательной и секущей”.

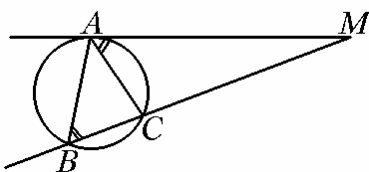


Рис. 6

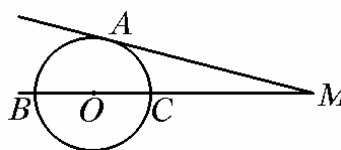


Рис. 7

Теорема 2. Пусть из одной точки M к окружности проведены касательная MA и секущая MB , пересекающая окружность в точке C (рис. 6). Тогда справедливо равенство $MA^2 = MB \cdot MC$, т.е. если из точки M к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной от точки M до точки касания равен произведению длин отрезков секущей от точки M до точек ее пересечения с окружностью.

► Проведём хорду AC . Угол MAC между касательной и хордой равен вписанному углу ABC , оба измеряются половиной градусной меры дуги AC . В треугольниках MAC и MBA равны углы MAC и MBA , а угол при вершине M общий. Эти треугольники подобны, из подобия имеем $MA / MB = MC / MA$, откуда следует $MA^2 = MB \cdot MC$. \triangleleft

Задача 4. Радиус окружности равен r . Из точки M проведены касательная MA и секущая MB , проходящая через центр окружности (рис. 7). Найти расстояние между точкой M и центром окружности, если $MB = 2MA$.

▷ Обозначим искомое расстояние x : $x = MO$, тогда $MB = x + r$, $MC = x - r$ и по условию $MA = MB/2 = (x + r)/2$. По теореме о касательной и секущей $(x + r)^2/4 = (x + r)(x - r)$, откуда, сокращая на $(x + r)$, получаем $(x + r)/4 = (x - r)$. Легко находим $x = 5r/3$. ◁

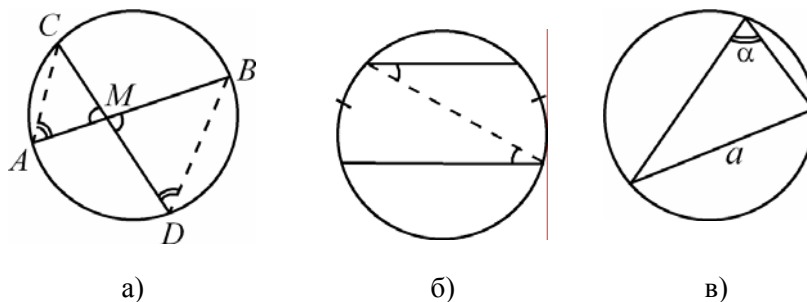


Рис. 8

Теорема 3. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды, т.е. если хорды AB и CD пересекаются в точке M (рис. 8), то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

▷ Рассмотрим треугольники ACM и DBM . Углы CAB и CDB вписанные, опирающиеся на одну дугу, они равны. Углы при вершине M равны, как вертикальные, следовательно, эти треугольники подобны. Из подобия следует $CM/MB = AM/MD$ или

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD. \triangleleft$$

Напомним также следующие свойства хорд окружности (доказательство проведите самостоятельно).

1°. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Обратное: диаметр, проходящий через середину хорды (не являющейся диаметром), перпендикулярен ей.

2°. Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности. Обратное: на равном расстоянии от центра окружности находятся равные хорды.

3°. Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны (рис. 8б).

4°. Если в окружности радиуса R вписанный угол, опирающийся на хорду длины a , равен α , то $a = 2R \sin \alpha$ (рис. 8в).

Задача 5. В окружности проведены три равные хорды $AB = BC = CD = a$. Хорды AB и CD пересекаются в точке K , угол $BKC = 120^\circ$ (рис. 9). Найти радиус окружности.

▷ Обозначим $CK = x$, $BK = y$, тогда $AK = a - y$, $DK = a - x$. По теореме 3 имеем:

$$CK \cdot DK = AK \cdot BK, \quad \text{т.е.}$$

$x(a - x) = y(a - y)$. Это равенство преобразуем к виду $(x - y)(a - x - y) = 0$. Так как $a \neq x + y$ (в этом случае треугольник BKC не существует), то $x = y$. Следовательно, треугольник BKC – равнобедренный и $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$. Из теоремы синусов следует, что $R = BK / 2 \sin(\angle 1)$. BK найдем из $\triangle BCD$ по

$$\text{теореме косинусов: } BD = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 30^\circ} = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$\text{Таким образом, } R = BD / 2 \sin 30^\circ = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}. \triangleleft$$

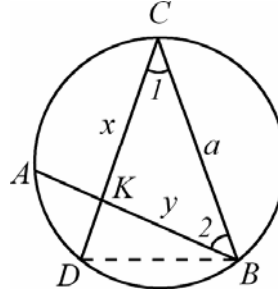


Рис. 9

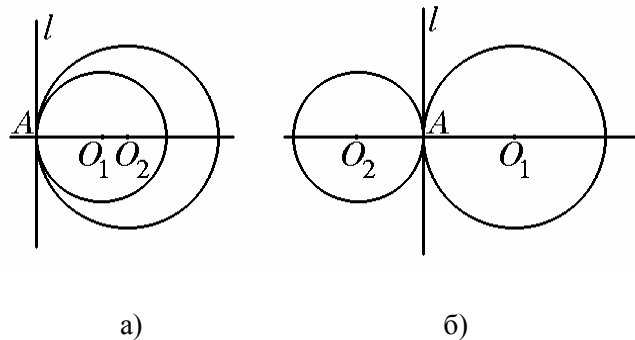


Рис. 10

В заключении параграфа рассмотрим задачи с двумя касающимися окружностями. Две окружности, имеющие общую точку и общую касательную в этой точке, называются касающимися. Если окружности расположены по одну сторону от общей касательной, они называются

касающимися внутренне (рис. 10а), а если расположены по разные стороны от касательной, то они называются касающимися внешне (рис. 10б).

Если O_1 и O_2 – центры окружностей, то по определению касательной $AO_1 \perp l$, $AO_2 \perp l$, следовательно, в обоих случаях *общая точка касания лежит на линии центров*.

Задача 6. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$) внутренне касаются в точке A . Через точку B , лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C (рис. 11). Найти AB , если $BC = a$.

▷ Пусть O_1 и O_2 – центры большей и меньшей окружностей, D – точка пересечения хорды AB с меньшей окружностью. Если $O_1N \perp AB$ и $O_2M \perp AB$, то $AN = AB/2$ и $AM = AD/2$ (т.к. радиус, перпендикулярный хорде, делит ее пополам). Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N следует $AN : AM = AO_1 : AO_2$ и, значит, $AB : AD = R_1 : R_2$. По теореме о касательной и секущей имеем:

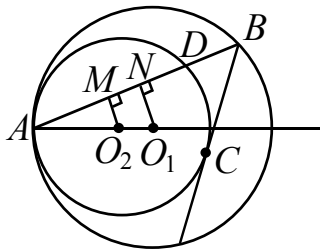


Рис. 11

$$BC^2 = AB \cdot BD = AB(AB - AD) = AB^2 \left(1 - \frac{AD}{AB}\right),$$

т.е. $a^2 = AB^2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)$.

Итак, $AB = a \sqrt{\frac{R_1}{R_1 - R_2}}$. ◁

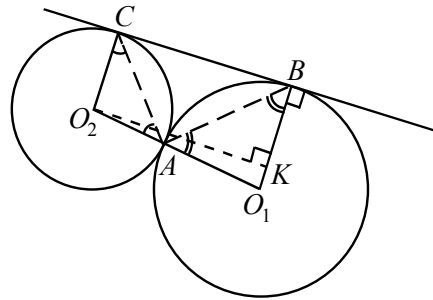


Рис. 12

Задача 7. Две окружности радиусов R_1 и R_2 внешне касаются в точке A (рис. 12). Их общая внешняя касательная касается большей окружности в точке B и меньшей – в точке C . Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

▷ Соединим центры O_1 и O_2 с точками B и C . По определению касательной, $O_1B \perp BC$ и $O_2C \perp BC$. Следовательно, $O_1B \parallel O_2C$ и $\angle BO_1O_2 + \angle CO_2O_1 = 180^\circ$. Так как $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BO_1A$ и $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle CO_2A$, то $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$. Отсюда следует следует, что $\angle BAC = 90^\circ$, и поэтому радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC , равен половине гипотенузы BC .

Найдем BC . Пусть $O_2K \perp O_1B$, тогда $KO_2 = BC$, $O_1K = R_1 - R_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$. По теореме Пифагора находим

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Итак, радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен $\sqrt{R_1R_2}$. ◁