Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Элементы теории множеств

Задание №5 для 9-х классов

(2005-2006 учебный год)

г. Долгопрудный, 2006

Составитель: Т.В. Михайлова, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

математика: задание №5 для 9-х классов (2005-2006 учебный год). - М.: МФТИ, 2005, 16с.

Составитель:
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 10.01.65
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0
Уч.-изд. л. 0, 88. Тираж 1900. Заказ №14-з.

Заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Множество. Подмножество. Равенство множеств. Числовые множества и множества точек

Понятие *множества* – одно из первичных и, следовательно, неопределяемых понятий математики; понятие множество столь общее, что трудно дать ему какое-нибудь определение, которое не сводилось бы к замене слова «множество» равнозначными выражениями: совокупность, собрание элементов и т.д. В качестве примера можно рассмотреть множество учеников вашего класса, множество корней уравнения, множество прямых на плоскости, множество точек данной прямой и т.д. *Элементы множества* – это то, из чего оно состоит. Например, числа 1 и -1 есть элементы множества корней уравнения $x^2-1=0$, а окружность с центром в начале координат и радиусом 4 есть элемент множества всех окружностей и т.д.

Обычно множества обозначают большими буквами: A, B, X, N, $\ldots$, а их элементы соответствующими маленькими буквами: a, b, x, n, $\ldots$.

В частности, приняты следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел (числовая прямая).

Если a есть элемент множества A, то пишут $a \in A$ (читается: элемент a принадлежит множеству A). Запись $a \overline{\in} A$ (или $a \notin A$) означает, что a не является элементом множества A. Например, $3 \in \mathbb{N}$, $1/3 \notin \mathbb{Z}$.

Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, является ли он элементом данного множества или нет. Рассмотрим способы, которыми может быть задано множество. Если множество состоит из конечного числа элементов, то оно может быть задано:

а) *перечислением* всех своих элементов, при этом порядок расположения элементов не существенен. Например, множество A корней уравнения $x^2-5x+6=0$ можно задать так: $A=\{2,3\}$ или $A=\{3,2\}$.

б) *указанием отличительных свойств*, которые выделяют элементы множества из элементов уже известного более широкого *основного* множества; например, $A=\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2-5x+6=0\}$ означает, что множество A состоит из тех элементов x множества действительных чисел, для которых справедливо равенство $x^2-5x+6=0$.

Очевидно, что перечислить бесконечное число элементов невозможно, поэтому для задания бесконечных множеств используется только второй способ. Например, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 10\}$ есть множество решений неравенства $x \geq 10$.

Может случиться, что ни один элемент не обладает отличительным свойством, определяющим множество A. Например, не существует ни одного натурального числа меньше, чем $1/2$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается $\varnothing$. Говорят: множество A натуральных чисел меньше, чем $1/2$, есть пустое множество; пишут $A = \varnothing$.

Если все элементы множества A являются и элементами множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B или, говорят, что множество A содержится в множестве B и записывают это так: $A \subset B$ или $B \supset A$. Например, множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ есть подмножество всех целых чисел $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Из определения следует, что само множество также является своим подмножеством, т.е. всегда $A \subset A$.

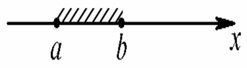
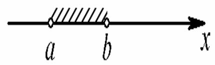
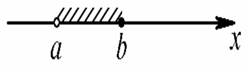
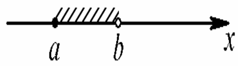
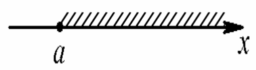
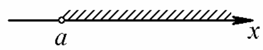
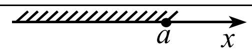
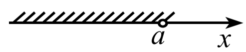
Полагают также, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества A: $\varnothing \subset A$ для любого множества A. В самом деле, так как пустое множество не содержит ни одного элемента, то в нем нет и элементов, которые бы не принадлежали множеству A.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называют *равными* и обозначают: $A = B$. Например, множество A всех корней уравнения $x^2 - 2x + 1 = 0$ и множество B всех натуральных чисел, меньших чем $3/2$, равны: и множество A, и множество B содержат один элемент – натуральное число 1.

При решении задач очень часто приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называют числовыми, все они являются подмножествами основного множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ – все это числовые множества.

Пусть a и b – действительные числа, $a < b$. Приведем названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*, и изобразим их на координатной прямой.

Числовые промежутки

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \le x \le b$	$[a,b]$	
Интервал от a до b (открытый промежуток)	$a < x < b$	(a,b)	
Открытый слева промежуток от a до b	$a < x \le b$	$(a,b]$	
Открытый справа промежуток от a до b	$a \le x < b$	$[a,b)$	
Числовой луч от a до $+\infty$	$x \ge a$	$[a,+\infty)$	
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$x > a$	$(a,+\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до a	$x \le a$	$(-\infty,a]$	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty,a)$	

Открытый справа и слева промежуток называются также полуоткрытыми промежутками, а числовые лучи – бесконечными промежутками. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ обозначается также $(-\infty,+\infty)$ и называется числовой прямой; всякая координатная прямая является изображением числовой прямой.

При рассмотрении числовых множеств вместо слов «элемент», «число» обычно говорят «точка»: точка $1/2$ лежит на отрезке $[-1,2]$ вместо число $1/2$ принадлежит отрезку $[-1,2]$.

§2. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение

Рассмотрим основное множество E, задаваемое некоторым свойством. Природа элементов множества E безразлична. Без ограничения общности будем считать, что множества A, B, C, X, …, рассматриваемые ниже в определениях и утверждениях данного параграфа, являются подмножествами множества E (напомним, что каждое подмножество основного множества E выделяется из E некоторым отличительным свойством). Например, можно рассматривать в качестве основного множества E множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, а в качестве A, B, C, X, … – любые числовые множества.

Итак, пусть A и B – произвольные множества. *Объединением* множеств A и B называется множество $A \bigcup B$, которое состоит из тех и только тех элементов основного множества, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \bigcap B$, которое состоит из тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A и множеству B.

Пример 1. $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$.

$A \bigcup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $A \bigcap B = \{1,3,5\}$.

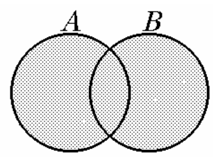
Пример 2. $A = [-1,1]$, $B = (0,4)$.

$A \bigcup B = [-1,4)$, $A \bigcap B = (0,1]$.

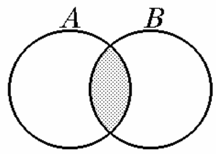
(Заметим, что не всегда объединение числовых промежутков является числовым промежутком: например, $[1,2] \bigcup (3,4]$ не является числовым промежутком.)

Аналогично определяется объединение и пересечение любого числа множеств. Например, объединение $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$ есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, C или D, а пересечение $A \bigcap B \bigcap C$ есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих **одновременно** всем множествам A, B и C.

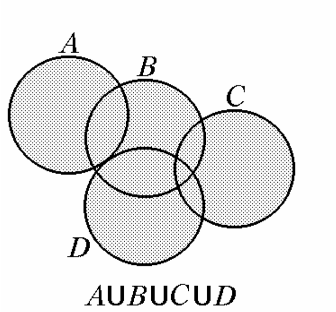
Определения и свойства операций над множествами будем для наглядности иллюстрировать рисунками; условимся изображать основное множество E в виде прямоугольника, а его подмножества A, B, C, … – в виде кругов. Тогда:

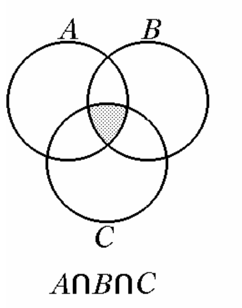


$A \cup B$



$A \cap B$





(заштрихованы соответственно множества $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A\bigcup B\bigcup C\bigcup D$ и $A\bigcap B\bigcap C$).

Если множества A и B не имеют ни одного общего элемента, то говорят, что они не пересекаются, или что их пересечение есть пустое множество: $A\bigcap B=\varnothing$.

Пример 3. Пусть (x,y) – координаты точек плоскости. Требуется указать штриховкой множество $A=\{(x,y)\,\|x+y|<1\}$.

Решение. Так как

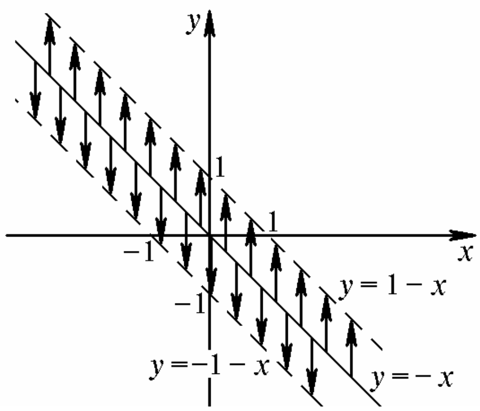
$$|a|=\begin{cases}a,\text{если a} \ge 0;\\ -a, если\ a<0,\end{cases}\quad \text{то}\quad |x+y|=\begin{cases}x+y,\text{ если } x+y\ge 0;\\ -(x+y),\text{ если } x+y<0,\end{cases}$$

Следовательно,

$$|x+y|<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y\ge 0;\\ x+y<1;\end{cases}\\ \begin{cases}x+y<0;\\ -(x+y)<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\ge -x;\\ y<1-x;\end{cases}\\ \begin{cases}y<-x;\\ y>-1-x.\end{cases}\end{array}\right.$$

Заметим, что точки прямых $y=1-x$ и $y=-1-x$ не принадлежат множеству A.



Свойства операций объединения и пересечения

$A\bigcup B = B\bigcup A$,	$A\bigcap B = B\bigcap A$,
$(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup (B\bigcup C)$,	$(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap (B\bigcap C)$,
$A\bigcup A = A$,	$A\bigcap A = A$,
$A\bigcup (B\bigcap C) =$	$A\bigcap (B\bigcup C) =$
$= (A\bigcup B)\bigcap (A\bigcup C)$,	$= (A\bigcap B)\bigcup (A\bigcap C)$,

Если множества A и B таковы, что $B\subset A$, то

$$A\bigcup B = A,\qquad A\bigcap B = B,$$

в частности,

$$A\bigcup\varnothing = A,\qquad A\bigcap\varnothing = \varnothing,$$
$$A\bigcup E = E\qquad A\bigcap E = A.$$

Докажем, например, равенство $A\bigcup (B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap (A\bigcup C)$. Проведем доказательство, пользуясь определением равенства множеств. Заметим, что если мы доказываем, что множества, скажем, X и Y равны, то доказательство проводится в **два** шага. Сначала показываем, что любой элемент множества X принадлежит множеству Y, т.е. $X\subset Y$ (шаг 1), а затем, что любой элемент из множества Y принадлежит множеству X, т.е. $Y\subset X$ (шаг 2). Тогда $X = Y$, т.к. $X\subset Y$ и $X\supset Y$.

Доказательство. Пусть $x\in A\bigcup (B\bigcap C)$. Тогда из определения объединения множеств следует, что либо $x\in A$, либо $x\in B\bigcap C$, либо обоим множествам одновременно. Если $x\in A$, то $x\in A\bigcup B$ и $x\in A\bigcup C$, а, следовательно, по определению пересечения множеств $x\in (A\bigcup B)\bigcap (A\bigcup C)$. Если $x\in B\bigcap C$, то $x\in B$ и $x\in C$.

Следовательно, $x \in A \bigcup B$ и $x \in A \bigcup C$. Отсюда имеем, что $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ (шаг 1). Таким образом доказано, что $A \bigcup (B \bigcap C) \subset (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$. Аналогично доказывается, что $A \bigcup (B \bigcap C) \supset (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ (шаг 2). Следовательно, по определению равенства множеств, $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.

Можно заметить, что объединение и пересечение множеств обладают свойствами, аналогичными свойствам суммы и произведения чисел. Например, $A \bigcup B = B \bigcup A$ и $a + b = b + a$, $A \bigcap B = B \bigcap A$ и $ab = ba$, $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$ и $(a + b)c = ac + bc$ и т.д. Однако, далеко не все арифметические правила переносятся на операции над множествами. Например, $A \bigcap A = A$ и $A \bigcup A = A$ для любого множества A, в то время, как соответствующие равенства для чисел, очевидно, неверны (приведите пример).

Пусть A и B – произвольные множества (напомним, что $A \subset E$ и $B \subset E$, где E – основное множество).

Разностью между множествами A и B называется множество $A \setminus B$, которое состоит из тех и только тех элементов множества A, которые не содержаться в множестве B (см. рис. 1).

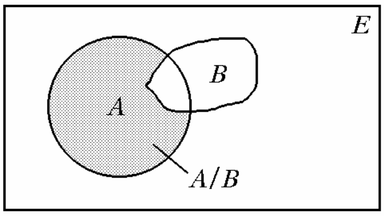


Рис. 1

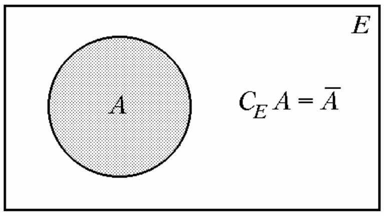


Рис. 2

Разностью между множеством E и содержащимся в нем подмножеством A обычно называют *дополнением* A в E и обозначается $C_E A$,

или CA, или $\overline{A}$, если из контекста ясно, в каком множестве ищется дополнение к A (см. рис. 2). Таким образом,

$$A \setminus B = \{x \in E | x \in A, x \notin B\}, \ \overline{A} = \{x \in E | x \notin A\}.$$

Из определения следует, что

$$A \bigcap \overline{A} = \varnothing,$$
$$A \bigcup \overline{A} = E,$$

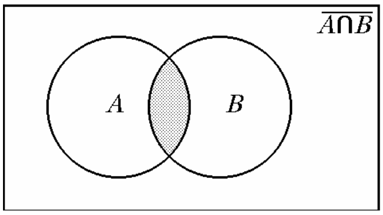
$\overline{(\overline{A})} = A$ для любого множества $A \subset E$.

Для любых двух подмножеств A и B основного множества E справедливы равенства

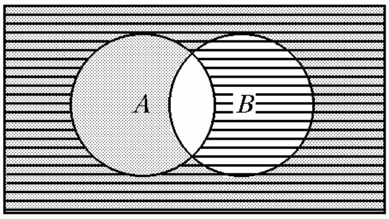
$$1.\ \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B},$$

$$2.\ \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B},$$

которые называются *законами де Моргана*. Второй закон де Моргана проиллюстрирован ниже.



Заштриховано $A \cap B$, не заштриховано множество $\overline{A \cap B}$



Заштриховано множество $\overline{B}$, горизонтальная штриховка – $\overline{A}$.

Докажем второй закон де Моргана (обратите внимание, что сам рисунок не является доказательством, он лишь упрощает проведение доказательства, иллюстрируя то, о чем говорится). Пусть $x \in \overline{A \bigcap B}$, т.е. $x \in E$, но $x \notin A \bigcap B$. Следовательно, либо $x \notin A$, либо $x \notin B$, либо x не принадлежит ни A, ни B. Но если $x \notin A$, то $x \in \overline{A}$, а если $x \notin B$, то $x \in \overline{B}$. Следовательно, в любом случае $x \in \overline{A} \bigcup \overline{B}$, т.е. $\overline{A \bigcap B} \subset \overline{A} \bigcup \overline{B}$. Наоборот, пусть $x \in \overline{A} \bigcup \overline{B}$. Тогда либо $x \in \overline{A}$, либо $x \in \overline{B}$, либо x принадлежит и $\overline{A}$, и $\overline{B}$. Если $x \in \overline{A}$, то $x \notin A$, если же $x \in \overline{B}$, то $x \notin B$. Таким образом, в любом случае x не принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Следовательно, $x \notin A \bigcap B$, т.е. $x \in \overline{A \bigcap B}$. Поэтому $\overline{A \bigcap B} \subset \overline{A} \bigcup \overline{B}$. Второй закон де Моргана доказан.

§3. Конечные множества

Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов.

Пусть A – некоторое конечное множество. Обозначим через $m(A)$ количество элементов в множестве A. Если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$, то $m(A) = 2$. Число элементов пустого множества равно нулю: $m(\varnothing) = 0$.

Если конечное множество A представимо в виде объединения непересекающихся множеств A_1, A_2, …, A_l, то $A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_l$ и $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, l$, то

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_l).$$

Для любых двух конечных множеств A и B справедливо равенство

$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B) \qquad (1)$$

В самом деле, пусть множества A и B не пересекаются, т.е. $A \bigcap B = \varnothing$, $m(A \bigcap B) = 0$. Тогда их объединение получается в результате добавления элементов одного множества к элементам другого. Следовательно, $m(A \bigcup B) = m(A) + m(B)$.

Если же $A \bigcap B \neq \varnothing$, то число общих элементов у множества A и B равно $m(A \bigcap B)$. Объединение множеств A и B получается путем добавления к элементам множества A всех элементов множества B, которые не входят в A. Число таких элементов равно $m(B) - m(A \bigcap B)$. Поэтому $m(A \bigcup B) = m(A) + [m(B) - m(A \bigcap B)] = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B)$.

Заметим, что не для любых четырех неотрицательных чисел m_1, m_2, m_3, m_4, которые удовлетворяют равенству $m_1 = m_2 + m_3 - m_4$, найдутся конечные множества A и B, для которых $m(A) = m_2$, $m(B) = m_3$, $m(A \bigcap B) = m_4$, $m(A \bigcup B) = m_1$ (так как $A \bigcap B \subset A$, $A \bigcap B \subset B$, $A \subset A \bigcup B$, $B \subset A \bigcup B$, следовательно, числа m_1, m_2, m_3, m_4 должны удовлетворять неравенствам $m_4 \le m_2 \le m_1$, $m_4 \le m_3 \le m_1$).

Пример 4. В классе 30 учеников. Известно, что 18 ребят имеют спортивный разряд по лыжам, а 16 – по плаванию. Десять учеников не имеют разряда ни по плаванию, ни по лыжам. Сколько ребят имеют спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам?

Решение. Пусть A – множество учеников, имеющих разряд по лыжам, а B – множество учеников, имеющих разряд по плаванию. Тогда в силу условия задачи $m(A) = 18$, $m(B) = 16$, а $m(A \bigcup B) =$ $= 30 - 10 = 20$. Применив равенство (1), имеем:

$$m(A \bigcap B) = -m(A \bigcup B) + m(A) + m(B) = 18 + 16 - 20 = 14.$$

Таким образом, спортивный разряд и по лыжам, и по плаванию имеют 14 учеников.

Пример 5. В группе туристов, посетивших нашу страну, 30 женщин, 25 человек из Польши, 15 мужчин из Канады, 43 человека из Европы. Треть женщин группы из Польши, а две женщины из Канады. Сколько туристов в этой группе, если каждый попал хотя бы в одну из упомянутых групп?

Решение. По условию задачи, каждый турист попал в одну из перечисленных групп: либо это женщины (причем, 10 женщин из Польши и 2 женщины из Канады), либо турист из Польши (следовательно, 15 мужчин из Польши), либо турист из Канады (2 женщины и 15 мужчин), либо турист из Европы (их 43).

Таким образом, можно разбить все множество туристов на непересекающиеся множества:

A – множество женщин из Польши,
B – множество женщин из Европы, но не из Польши,
C – множество женщин из Канады,
D – множество женщин не из Европы, и не из Канады,
X – множество мужчин из Польши,
Y – множество мужчин из Европы, но не из Польши,
V – множество мужчин из Канады.

Тогда в силу условия задачи

$$m(A) = 10,\ m(C) = 2,\ m(X) = 25 - 10 = 15,\ m(V) = 15,$$
$$30 = m(A) + m(B) + m(C) + m(D) = 10 + m(B) + 2 + m(D).$$

Следовательно, $m(B) = 18 - m(D)$. $43 = m(A) + m(B) + m(X) +$
$+ m(Y) = 10 + m(B) + 15 + m(Y)$.

Следовательно, $m(Y) = 18 - m(B) = 18 - (18 - m(D)) = m(D)$.

Таким образом, общее число туристов в группе равно

$$m(A) + m(B) + m(C) + m(D) + m(X) + m(Y) + m(V) = 60 + m(D),$$

где $m(D)$ может быть любым целым числом, удовлетворяющим условию $0 \le m(D) \le 18$.

§4. Эквивалентность множеств. Счетные и несчетные множества

Любые два конечных множества можно сравнивать по количеству элементов в них. Действительно, для этого достаточно перечислить элементы каждого из них. Например, $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Очевидно, что $m(A) < m(B)$, т.к. $m(A) = 5$, $m(B) = 10$. Если же мы имеем дело с бесконечными множествами, например, множеством треугольников на плоскости и множеством натуральных чисел, то такой способ сравнения множеств не подходит.

Рассмотрим способ сравнения множеств, который будет применим как к конечным, так и к бесконечным множествам. Допустим, к вам пришли гости, и вы должны накрыть стол. Для этого совсем не обязательно сначала пересчитать гостей, а потом отсчитать нужное количество тарелок и приборов. Можно просто рассадить гостей и перед каждым поставить тарелку и положить прибор. Такое попарное сочетание элементов разных множеств называется *взаимно однозначным соответствием*.

Между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, если:

а) каждому элементу $a \in A$ соответствует единственный элемент $b \in B$;

б) каждый элемент $b \in B$ при этом соответствует некоторому элементу $a \in A$;

в) разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B.

Множества A и B называются *эквивалентными* или *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Данное определение годится для любых множеств, а не только конечных.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Множество натуральных чисел и множество четных положительных чисел эквивалентны, т.к. между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по следующему правилу:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & & 2n & \end{array}$$

Так как множество четных положительных чисел является подмножеством множества натуральных чисел, то данный пример показывает, что бесконечное множество может быть равномощным своему подмножеству. В случае конечных множеств такая ситуация невозможна: между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда $m(A) = m(B)$.

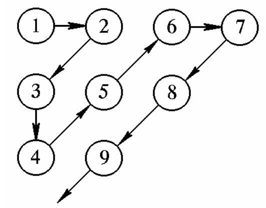
2. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots & n & -n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \end{array}$$

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *счетным множество*. Иначе говоря, множество счетно, если все элементы этого множества можно занумеровать. Таким образом, множество четных положительных чисел и множество целых чисел счетны.

3. Множество положительных рациональных чисел счетно. В самом деле, представим каждое рациональное число в виде несократимой дроби, запишем его в бесконечную таблицу, а затем пронумеруем числа в таблице следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \cdots \end{array}$$



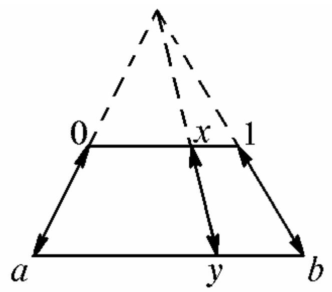
4. Множества $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},...\right\}$ и $B=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$ счетны, а следовательно, эквивалентны. В самом деле, установим взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} A & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathrm{N} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ B & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \cdots \end{array}$$

5. Любой отрезок $[a,b]$, $a \neq b$ эквивалентен отрезку $[0,1]$. Искомое взаимно однозначное соответствие можно установить как аналитически, например формулой: $x \in [0,1]$, $x \leftrightarrow y=(b-a)x+a$, $y \in [a,b]$, так и геометрически:

6. Установим взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(0;1)$ и точками полуинтервала $[0;1)$. Заметим, что множество $(0;1)\setminus A$ и множество $[0;1)\setminus B$ равны (множества A и B определены в пункте 4); обозначим $C=(0;1)\setminus A=[0;1)\setminus B$. Тогда $(0;1)=A\cup C$, $[0;1)=B\cup C$. Пусть $x \in (0;1)$. Если $x \in A$, то поставим ему в соответствие $y \in B$ по закону, описанному в примере 4; если же

$x \in C$, то поставим ему в соответствие себя: $y = x \in C$. Таким



образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между $(0;1)$ и $[0;1)$. Следовательно, множества $(0;1)$ и $[0;1)$ эквивалентны.

В заключении заметим, что не все бесконечные множества являются счетными; например, можно доказать, что множество точек любого отрезка $[a,b]$, $a \neq b$ не является счетным.

Задачи

1(5). Задайте множества перечислением их элементов:

$A = \{x \in \mathbb{R}: (x^2+1)(x^3-1) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q}: (x^2-2)(x^2-1) = 0\}$,

$C = \{x \in \mathbb{N}: x$ – делитель $27\}$, $D = \{x \in \mathbb{N}: x$ кратно 3, $x \in [1;\ 31]\}$.

Найдите $A \cap B,\ C \cap B,\ (A \cup D) \cap C,\ D \setminus C,\ C \setminus D$.

2(6). Найдите $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$, если:

а) $A = (1;\ 4)$, $B = [0;\ 8]$;

б) $A = (3;\ +\infty)$, $B = [1;\ 4)$;

в) $A = [2;\ 5]$, $B = (-\infty;\ 3)$.

3(12). Пусть (x, y) – координаты точек плоскости. Укажите штриховкой множества:

$A = \{(x,y) \mid x > 2\}$, $C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$,

$B = \{(x,y) \mid x - y \ge 1\}$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 9\}$,

$E = \{(x,y) \mid |x - 2y| \ge 1\}$, $G = \{(x,y) \mid |x + y| < x\}$.

$H = \{(x,y) \mid |x - 2y| \le |x + y|\}$.

Найдите $A \cap B,\ B \cap C,\ D \cup C;\ E \cap G,\ E \setminus H$.

4(8). Пусть A, B, C – подмножества основного множества E. Докажите:

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (первый закон де Моргана), б) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$,

в) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$,

г) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap B$.

5(5). Пусть A, B, C – конечные подмножества основного множества E. Докажите, что справедливо равенство:

$$m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap C) - m(A \cap B) - m(B \cap C) +$$
$$+ m(A \cap B \cap C).$$

6(5). Из 25 учеников класса «отлично» по английскому языку за полугодие получили 10 человек, а «отлично» по математике получили 14 человек, 7 учеников получили «отлично» по обоим предметам. Сколько учеников класса не имеют отличной оценки ни по математике, ни по английскому языку?

7(6). В олимпиаде по математике приняло участие 10 учеников класса, в олимпиаде по биологии – 7 человек, а в олимпиаде по физике – 9 человек. Известно, что в олимпиадах по математике и биологии участвовало 4 ученика, в олимпиадах по математике и физике – 5 учеников, а во всех трех олимпиадах – 2 ученика. Сколько школьников участвовали в олимпиадах по физике и биологии, если всего участников олимпиад было 17 человек?

8(13). а)(3) Покажите, что множество рациональных чисел счетно.

б)(5) Установите взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $(0;2)$ и $(4;7)$.

в)(5) Докажите, что множества $(-2;1)$ и $(2;+\infty)$ равномощны.

9(15). а)(5) Установите взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $(0;1)$ и $[0;1]$.

б)(5) Установите взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $(-1;2]$ и $[2;4]$.

в)(5) взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $(3;8)$ и $(4;9)$.

