§4. Эквивалентность множеств. Счетные и несчетные множества

Любые два конечных множества можно сравнивать по количеству элементов в них. Действительно, для этого достаточно перечислить элементы каждого из них. Например, $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Очевидно, что $m(A) < m(B)$, т.к. $m(A) = 5$, $m(B) = 10$. Если же мы имеем дело с бесконечными множествами, например, множеством треугольников на плоскости и множеством натуральных чисел, то такой способ сравнения множеств не подходит.

Рассмотрим способ сравнения множеств, который будет применим как к конечным, так и к бесконечным множествам. Допустим, к вам пришли гости, и вы должны накрыть стол. Для этого совсем не обязательно сначала пересчитать гостей, а потом отсчитать нужное количество тарелок и приборов. Можно просто рассадить гостей и перед каждым поставить тарелку и положить прибор. Такое попарное сочетание элементов разных множеств называется *взаимно однозначным соответствием*.

Между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, если:

а) каждому элементу $a \in A$ соответствует единственный элемент $b \in B$;

б) каждый элемент $b \in B$ при этом соответствует некоторому элементу $a \in A$;

в) разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B.

Множества A и B называются *эквивалентными* или *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Данное определение годится для любых множеств, а не только конечных.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Множество натуральных чисел и множество четных положительных чисел эквивалентны, т.к. между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по следующему правилу:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & & 2n & \end{array}$$

Так как множество четных положительных чисел является подмножеством множества натуральных чисел, то данный пример показывает, что бесконечное множество может быть равномощным своему подмножеству. В случае конечных множеств такая ситуация невозможна: между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда $m(A) = m(B)$.

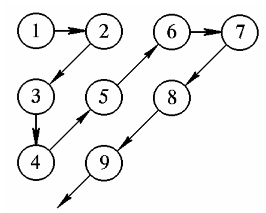
2. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots & n & -n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \end{array}$$

Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *счетным множество*. Иначе говоря, множество счетно, если все элементы этого множества можно занумеровать. Таким образом, множество четных положительных чисел и множество целых чисел счетны.

3. Множество положительных рациональных чисел счетно. В самом деле, представим каждое рациональное число в виде несократимой дроби, запишем его в бесконечную таблицу, а затем пронумеруем числа в таблице следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \cdots \end{array}$$



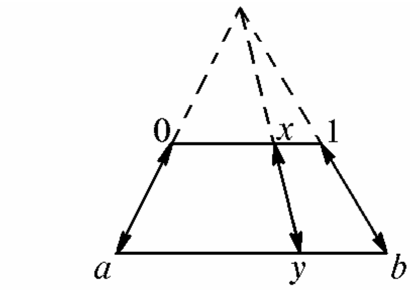
4. Множества $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},...\right\}$ и $B=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$ счетны, а следовательно, эквивалентны. В самом деле, установим взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathrm{N} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ B & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \cdots \end{array}$$

5. Любой отрезок $[a,b]$, $a\neq b$ эквивалентен отрезку $[0,1]$. Искомое взаимно однозначное соответствие можно установить как аналитически, например формулой: $x\in[0,1]$, $x\leftrightarrow y=(b-a)x+a$, $y\in[a,b]$, так и геометрически:

6. Установим взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(0;1)$ и точками полуинтервала $[0;1)$. Заметим, что множество $(0;1)\setminus A$ и множество $[0;1)\setminus B$ равны (множества A и B определены в пункте 4); обозначим $C=(0;1)\setminus A=[0;1)\setminus B$. Тогда $(0;1)=A\bigcup C$, $[0;1)=B\bigcup C$. Пусть $x\in(0;1)$. Если $x\in A$, то поставим ему в соответствие $y\in B$ по закону, описанному в примере 4; если же

$x \in C$, то поставим ему в соответствие себя: $y = x \in C$. Таким



образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между $(0;1)$ и $[0;1)$. Следовательно, множества $(0;1)$ и $[0;1)$ эквивалентны.

В заключении заметим, что не все бесконечные множества являются счетными; например, можно доказать, что множество точек любого отрезка $[a,b]$, $a \neq b$ не является счетным.