§3. Конечные множества

Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов.

Пусть A – некоторое конечное множество. Обозначим через $m(A)$ количество элементов в множестве A. Если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$, то

$m(A)=2$. Число элементов пустого множества равно нулю: $m(\varnothing)=0$.

Если конечное множество A представимо в виде объединения непересекающихся множеств A_1, A_2, …, A_l, то $A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_l$ и $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1,...,l$, то

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2) + ... + m(A_l).$$

Для любых двух конечных множеств A и B справедливо равенство

$$m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B) \qquad (1)$$

В самом деле, пусть множества A и B не пересекаются, т.е. $A \bigcap B = \varnothing$, $m(A \bigcap B) = 0$. Тогда их объединение получается в результате добавления элементов одного множества к элементам другого. Следовательно, $m(A \bigcup B) = m(A) + m(B)$.

Если же $A \bigcap B \neq \varnothing$, то число общих элементов у множества A и B равно $m(A \bigcap B)$. Объединение множеств A и B получается путем добавления к элементам множества A всех элементов множества B, которые не входят в A. Число таких элементов равно $m(B) - m(A \bigcap B)$. Поэтому $m(A \bigcup B) = m(A) + [m(B) - m(A \bigcap B)] = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B)$.

Заметим, что не для любых четырех неотрицательных чисел m_1, m_2, m_3, m_4, которые удовлетворяют равенству $m_1 = m_2 + m_3 - m_4$, найдутся конечные множества A и B, для которых $m(A) = m_2$, $m(B) = m_3$, $m(A \bigcap B) = m_4$, $m(A \bigcup B) = m_1$ (так как $A \bigcap B \subset A$, $A \bigcap B \subset B$, $A \subset A \bigcup B$, $B \subset A \bigcup B$, следовательно, числа m_1, m_2, m_3, m_4 должны удовлетворять неравенствам $m_4 \leq m_2 \leq m_1$, $m_4 \leq m_3 \leq m_1$).

Пример 4. В классе 30 учеников. Известно, что 18 ребят имеют спортивный разряд по лыжам, а 16 – по плаванию. Десять учеников не имеют разряда ни по плаванию, ни по лыжам. Сколько ребят имеют спортивный разряд и по плаванию, и по лыжам?

Решение. Пусть A – множество учеников, имеющих разряд по лыжам, а B – множество учеников, имеющих разряд по плаванию. Тогда в силу условия задачи $m(A) = 18$, $m(B) = 16$, а $m(A \bigcup B) =$ $= 30 - 10 = 20$. Применив равенство (1), имеем:

$$m(A \bigcap B) = -m(A \bigcup B) + m(A) + m(B) = 18 + 16 - 20 = 14.$$

Таким образом, спортивный разряд и по лыжам, и по плаванию имеют 14 учеников.

Пример 5. В группе туристов, посетивших нашу страну, 30 женщин, 25 человек из Польши, 15 мужчин из Канады, 43 человека из Европы.

Треть женщин группы из Польши, а две женщины из Канады. Сколько туристов в этой группе, если каждый попал хотя бы в одну из упомянутых групп?

Решение. По условию задачи, каждый турист попал в одну из перечисленных групп: либо это женщины (причем, 10 женщин из Польши и 2 женщины из Канады), либо турист из Польши (следовательно, 15 мужчин из Польши), либо турист из Канады (2 женщины и 15 мужчин), либо турист из Европы (их 43).

Таким образом, можно разбить все множество туристов на непересекающиеся множества:

A – множество женщин из Польши,
B – множество женщин из Европы, но не из Польши,
C – множество женщин из Канады,
D – множество женщин не из Европы, и не из Канады,
X – множество мужчин из Польши,
Y – множество мужчин из Европы, но не из Польши,
V – множество мужчин из Канады.

Тогда в силу условия задачи

$$m(A) = 10,\ m(C) = 2,\ m(X) = 25 - 10 = 15,\ m(V) = 15,$$

$$30 = m(A) + m(B) + m(C) + m(D) = 10 + m(B) + 2 + m(D).$$

Следовательно, $m(B) = 18 - m(D)$. $43 = m(A) + m(B) + m(X) +$
$+ m(Y) = 10 + m(B) + 15 + m(Y)$.

Следовательно, $m(Y) = 18 - m(B) = 18 - (18 - m(D)) = m(D)$.

Таким образом, общее число туристов в группе равно

$$m(A) + m(B) + m(C) + m(D) + m(X) + m(Y) + m(V) = 60 + m(D),$$

где $m(D)$ может быть любым целым числом, удовлетворяющим условию $0 \le m(D) \le 18$.