§2. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение

Рассмотрим основное множество E, задаваемое некоторым свойством. Природа элементов множества E безразлична. Без ограничения общности будем считать, что множества A, B, C, X, …, рассматриваемые ниже в определениях и утверждениях данного параграфа, являются подмножествами множества E (напомним, что каждое подмножество основного множества E выделяется из E некоторым отличительным свойством). Например, можно рассматривать в качестве основного множества E множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, а в качестве A, B, C, X, … – любые числовые множества.

Итак, пусть A и B – произвольные множества. *Объединением* множеств A и B называется множество $A \bigcup B$, которое состоит из тех и только тех элементов основного множества, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \bigcap B$, которое состоит из тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит и множеству A и множеству B.

Пример 1. $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$.

$A \bigcup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $A \bigcap B = \{1,3,5\}$.

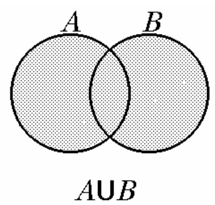
Пример 2. $A = [-1,1]$, $B = (0,4)$.

$A \bigcup B = [-1,4)$, $A \bigcap B = (0,1]$.

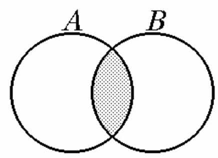
(Заметим, что не всегда объединение числовых промежутков является числовым промежутком: например, $[1,2] \bigcup (3,4]$ не является числовым промежутком.)

Аналогично определяется объединение и пересечение любого числа множеств. Например, объединение $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$ есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, C или D, а пересечение $A \bigcap B \bigcap C$ есть множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих **одновременно** всем множествам A, B и C.

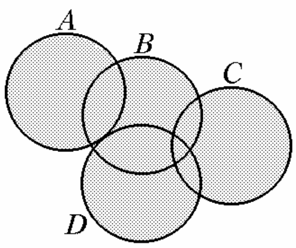
Определения и свойства операций над множествами будем для наглядности иллюстрировать рисунками; условимся изображать основное множество E в виде прямоугольника, а его подмножества A, B, C, … – в виде кругов. Тогда:



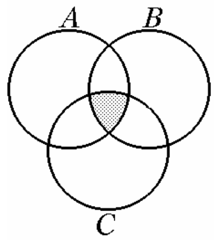
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \cup B \cup C \cup D$



$A \cap B \cap C$

(заштрихованы соответственно множества $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$ и $A \bigcap B \bigcap C$).

Если множества A и B не имеют ни одного общего элемента, то говорят, что они не пересекаются, или что их пересечение есть пустое множество: $A \bigcap B = \varnothing$.

Пример 3. Пусть (x, y) – координаты точек плоскости. Требуется указать штриховкой множество $A = \{(x, y) \| x + y| < 1\}$.

Решение. Так как

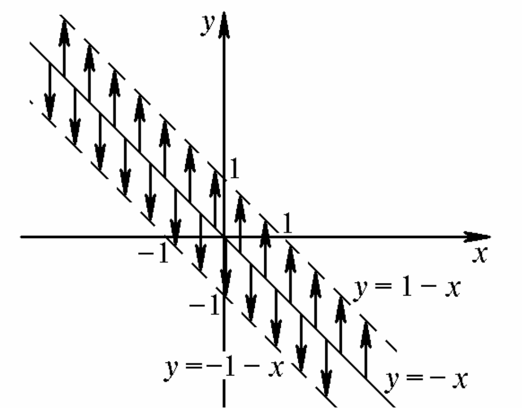
$$|a| = \begin{cases} a, \text{если a} \geq 0; \\ -a, \textit{если } a < 0, \end{cases} \text{ то } |x + y| = \begin{cases} x + y, \text{если } x + y \geq 0; \\ -(x + y), \text{если } x + y < 0, \end{cases}$$

Следовательно,

$$|x + y| < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y \geq 0; \\ x + y < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x + y < 0; \\ -(x + y) < 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq -x; \\ y < 1 - x; \end{cases} \\ \begin{cases} y < -x; \\ y > -1 - x. \end{cases} \end{array} \right.$$

Заметим, что точки прямых $y = 1 - x$ и $y = -1 - x$ не принадлежат множеству A.



Свойства операций объединения и пересечения

$A\bigcup B = B\bigcup A$, $\quad$ $A\bigcap B = B\bigcap A$,

$(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C)$, $\quad$ $(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C)$,

$A\bigcup A = A$, $\quad$ $A\bigcap A = A$,

$A\bigcup(B\bigcap C) =$ $\quad$ $A\bigcap(B\bigcup C) =$

$= (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$, $\quad$ $= (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$,

Если множества A и B таковы, что $B \subset A$, то

$$A\bigcup B = A, \qquad A\bigcap B = B,$$

в частности,

$$A\bigcup\varnothing = A, \qquad A\bigcap\varnothing = \varnothing,$$

$$A\bigcup E = E \qquad A\bigcap E = A.$$

Докажем, например, равенство $A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$. Проведем доказательство, пользуясь определением равенства множеств. Заметим, что если мы доказываем, что множества, скажем, X и Y равны, то доказательство проводится в **два** шага. Сначала показываем, что любой элемент множества X принадлежит множеству Y, т.е. $X \subset Y$ (шаг 1), а затем, что любой элемент из множества Y принадлежит множеству X, т.е. $Y \subset X$ (шаг 2). Тогда $X = Y$, т.к. $X \subset Y$ и $X \supset Y$.

Доказательство. Пусть $x \in A\bigcup(B\bigcap C)$. Тогда из определения объединения множеств следует, что либо $x \in A$, либо $x \in B\bigcap C$, либо обоим множествам одновременно. Если $x \in A$, то $x \in A\bigcup B$ и $x \in A\bigcup C$, а, следовательно, по определению пересечения множеств

$x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$. Если $x \in B \bigcap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, $x \in A \bigcup B$ и $x \in A \bigcup C$. Отсюда имеем, что $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ (шаг 1). Таким образом доказано, что $A \bigcup (B \bigcap C) \subset (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$. Аналогично доказывается, что $A \bigcup (B \bigcap C) \supset (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ (шаг 2). Следовательно, по определению равенства множеств, $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.

Можно заметить, что объединение и пересечение множеств обладают свойствами, аналогичными свойствам суммы и произведения чисел. Например, $A \bigcup B = B \bigcup A$ и $a + b = b + a$, $A \bigcap B = B \bigcap A$ и $ab = ba$, $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$ и $(a + b)c = ac + bc$ и т.д. Однако, далеко не все арифметические правила переносятся на операции над множествами. Например, $A \bigcap A = A$ и $A \bigcup A = A$ для любого множества A, в то время, как соответствующие равенства для чисел, очевидно, неверны (приведите пример).

Пусть A и B – произвольные множества (напомним, что $A \subset E$ и $B \subset E$, где E – основное множество).

Разностью между множествами A и B называется множество $A \setminus B$, которое состоит из тех и только тех элементов множества A, которые не содержаться в множестве B (см. рис. 1).

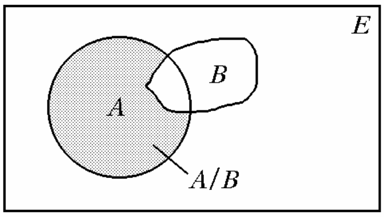


Рис. 1

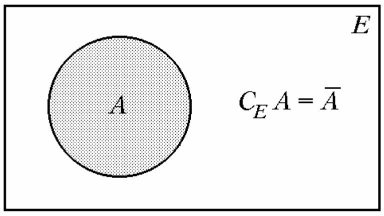


Рис. 2

Разностью между множеством E и содержащимся в нем подмножеством A обычно называют *дополнением* A в E и обозначается $C_E A$,

или CA, или $\overline{A}$, если из контекста ясно, в каком множестве ищется дополнение к A (см. рис. 2). Таким образом,

$$A \setminus B = \{x \in E | x \in A, x \notin B\}, \ \overline{A} = \{x \in E | x \notin A\}.$$

Из определения следует, что

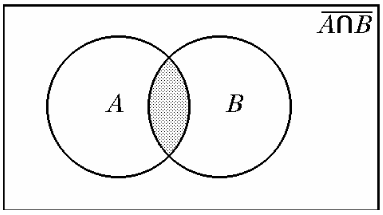
$$A \bigcap \overline{A} = \varnothing,$$
$$A \bigcup \overline{A} = E,$$

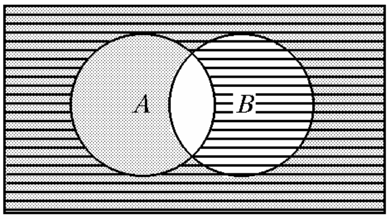
$\overline{(\overline{A})} = A$ для любого множества $A \subset E$.

Для любых двух подмножеств A и B основного множества E справедливы равенства

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

которые называются *законами де Моргана*. Второй закон де Моргана проиллюстрирован ниже.





Заштриховано $A \cap B$, не заштриховано множество $\overline{A \cap B}$

Заштриховано множество $\overline{B}$, горизонтальная штриховка – $\overline{A}$.

Докажем второй закон де Моргана (обратите внимание, что сам рисунок не является доказательством, он лишь упрощает проведение доказательства, иллюстрируя то, о чем говорится). Пусть $x \in \overline{A \cap B}$, т.е. $x \in E$, но $x \notin A \cap B$. Следовательно, либо $x \notin A$, либо $x \notin B$, либо x не принадлежит ни A, ни B. Но если $x \notin A$, то $x \in \overline{A}$, а если $x \notin B$, то $x \in \overline{B}$. Следовательно, в любом случае $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, т.е. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Наоборот, пусть $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Тогда либо $x \in \overline{A}$, либо $x \in \overline{B}$, либо x принадлежит и $\overline{A}$, и $\overline{B}$. Если $x \in \overline{A}$, то $x \notin A$, если же $x \in \overline{B}$, то $x \notin B$. Таким образом, в любом случае x не принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Следовательно, $x \notin A \cap B$, т.е. $x \in \overline{A \cap B}$. Поэтому $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Второй закон де Моргана доказан.

