§1. Множество. Подмножество. Равенство множеств. Числовые множества и множества точек

Понятие *множества* – одно из первичных и, следовательно, неопределяемых понятий математики; понятие множество столь общее, что трудно дать ему какое-нибудь определение, которое не сводилось бы к замене слова «множество» равнозначными выражениями: совокупность, собрание элементов и т.д. В качестве примера можно рассмотреть множество учеников вашего класса, множество корней уравнения, множество прямых на плоскости, множество точек данной прямой и т.д. *Элементы множества* – это то, из чего оно состоит. Например, числа 1 и -1 есть элементы множества корней уравнения $x^2 - 1 = 0$, а окружность с центром в начале координат и радиусом 4 есть элемент множества всех окружностей и т.д.

Обычно множества обозначают большими буквами: $A, B, X, N, \ldots$, а их элементы соответствующими маленькими буквами: $a, b, x, n, \ldots$.

В частности, приняты следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел (числовая прямая).

Если a есть элемент множества A, то пишут $a \in A$ (читается: элемент a принадлежит множеству A). Запись $a \overline{\in} A$ (или $a \notin A$) означает, что a не является элементом множества A. Например, $3 \in \mathbb{N}$, $1/3 \notin \mathbb{Z}$.

Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, является ли он элементом данного множества или нет. Рассмотрим способы, которыми может быть задано множество. Если множество состоит из конечного числа элементов, то оно может быть задано:

а) *перечислением* всех своих элементов, при этом порядок расположения элементов не существенен. Например, множество A корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ можно задать так: $A = \{2,3\}$ или $A = \{3,2\}$.

б) *указанием отличительных свойств*, которые выделяют элементы множества из элементов уже известного более широкого *основного* множества; например, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ означает, что множество A состоит из тех элементов x множества действительных чисел, для которых справедливо равенство $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Очевидно, что перечислить бесконечное число элементов невозможно, поэтому для задания бесконечных множеств используется только второй способ. Например, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge 10\}$ есть множество решений неравенства $x\ge 10$.

Может случиться, что ни один элемент не обладает отличительным свойством, определяющим множество A. Например, не существует ни одного натурального числа меньше, чем $1/2$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается $\varnothing$. Говорят: множество A натуральных чисел меньше, чем $1/2$, есть пустое множество; пишут $A=\varnothing$.

Если все элементы множества A являются и элементами множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B или, говорят, что множество A содержится в множестве B и записывают это так: $A\subset B$ или $B\supset A$. Например, множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ есть подмножество всех целых чисел $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

Из определения следует, что само множество также является своим подмножеством, т.е. всегда $A\subset A$.

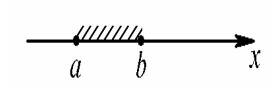
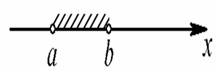
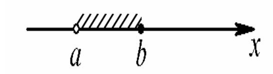
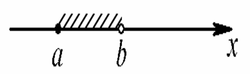
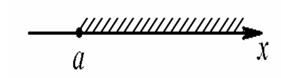
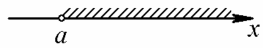
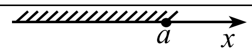
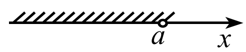
Полагают также, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества A: $\varnothing\subset A$ для любого множества A. В самом деле, так как пустое множество не содержит ни одного элемента, то в нем нет и элементов, которые бы не принадлежали множеству A.

Если $A\subset B$ и $B\subset A$, то множества A и B называют *равными* и обозначают: $A=B$. Например, множество A всех корней уравнения $x^2-2x+1=0$ и множество B всех натуральных чисел, меньших чем $3/2$, равны: и множество A, и множество B содержат один элемент – натуральное число 1.

При решении задач очень часто приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называют числовыми, все они являются подмножествами основного множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество корней уравнения $x^2-5x+6=0$ – все это числовые множества.

Пусть a и b – действительные числа, $a<b$. Приведем названия, определения и обозначения числовых множеств, называемых *числовыми промежутками*, и изобразим их на координатной прямой.

Числовые промежутки

Название	Неравенство, определяющее множество	Обозначение	Изображение
Отрезок от a до b (замкнутый промежуток)	$a \le x \le b$	$[a,b]$	
Интервал от a до b (открытый промежуток)	$a < x < b$	(a,b)	
Открытый слева промежуток от a до b	$a < x \le b$	$(a,b]$	
Открытый справа промежуток от a до b	$a \le x < b$	$[a,b)$	
Числовой луч от a до $+\infty$	$x \ge a$	$[a,+\infty)$	
Открытый числовой луч от a до $+\infty$	$x > a$	$(a,+\infty)$	
Числовой луч от $-\infty$ до a	$x \le a$	$(-\infty,a]$	
Открытый числовой луч от $-\infty$ до a	$x < a$	$(-\infty,a)$	

Открытый справа и слева промежуток называются также полуоткрытыми промежутками, а числовые лучи – бесконечными промежутками. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ обозначается также $(-\infty,+\infty)$ и называется числовой прямой; всякая координатная прямая является изображением числовой прямой.

При рассмотрении числовых множеств вместо слов «элемент», «число» обычно говорят «точка»: точка $1/2$ лежит на отрезке $[-1,2]$ вместо число $1/2$ принадлежит отрезку $[-1,2]$.