Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа при Московском физико – техническом институте (государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Показательные и логарифмические уравнения, системы, неравенства

Задание №5 для 11-х классов

(2005-2006 учебный год)

г. Долгопрудный, 2005

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

математика: задание №5 для 11-х классов (2005-2006 учебный год). - М.: МФТИ, 2005, 32с.

Составитель:

Колесникова Софья Ильинична

Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 28.09.05

Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0

Уч.-изд. л. 1,77. Тираж 1800. Заказ № 14-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа

Московский физико-технический институт

(государственный университет)

«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**

тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**

тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§1. Введение

Напомним основные свойства показательной и логарифмической функций.

В школе принимается без доказательства, что для любых положительных чисел a и b и любых действительных чисел α и β справедливы свойства:

$$\text{C1. } a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}. \qquad \text{C2. } \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}.$$

$$\text{C3. } a^{\alpha}b^{\alpha}=(ab)^{\alpha}. \qquad \text{C4. } \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}.$$

Если $a>0,\ a\neq 1,$ то функция a^x отлична от постоянной. Ее называют показательной функцией с основанием a. Если $a>1,$ то функция a^x – монотонно возрастающая на R; если $0<a<1,$ то функция a^x – монотонно убывающая на R. Область значений показательной функции – множество R_+ всех положительных чисел. Отсюда и из монотонности следует, что, если $a>0, a\neq 1$, то для любого положительного числа N существует единственное число x, такое, что $a^x=N$. Это число называется логарифмом числа N по основанию a и обозначается $\log_a N$. Из определения следует, что

$$\boxed{a^{\log_a N}=N \text{ в ОДЗ}}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством в ОДЗ (только для $N>0, a>0, a\neq 1$).

В школе показывается, что, если $\underline{a>0, a\neq 1, M>0, N>0}$, $\underline{\alpha}$ – любое действительное число, то верны формулы

C5. $\log_a MN=\log_a M+\log_a N.$ C6. $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N.$

С7. $\log_a M^{\alpha} = \alpha \log_a M$.

С8. Если, к тому же, $b > 0, b \neq 1$, то $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$.

Последняя формула позволяет переходить от логарифма по основанию a к логарифму по основанию b. Она называется формулой перехода к новому основанию.

Свойства 5 – 8 при вышеописанных условиях ($M > 0, N > 0$) являются тождествами и читаются как справа налево, так и слева направо.

Заметим, однако, что левые и правые части равенств в С5 и С6 имеют разные области определения: левая часть определена при $MN > 0$, а правая – при $M > 0, N > 0$. Это надо учитывать при решении задач: $MN > 0$ не только тогда, когда $M > 0, N > 0$, но и тогда, когда $M < 0, N < 0$. Учтем, что $MN = (-M)(-N)$, и для $-M > 0, -N > 0$ (в силу С5) $\log_a(-M)(-N) = \log_a(-M) + \log_a(-N)$.
Теперь запишем более общую формулу

С5*. Если $MN > 0$, то $\log_a MN = \log_a|M| + \log_a|N|$.

С9. Если $M \neq 0, N \neq 0$, то $\log_a|M| + \log_a|N| = \log_a|MN|$.

Аналогично показывается, что

С6*. Если $MN > 0$, то $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a|M| - \log_a|N|$.

С10. Если $M \neq 0, N \neq 0$, то $\log_a|M| - \log_a|N| = \log_a\left|\dfrac{M}{N}\right|$.

С7*. Если $M \neq 0$, то для любого натурального n верно, что $\log_a M^{2n} = 2n \log_a|M|$.

Все свойства читаются в обе стороны (т. е. являются тождествами), при выполнении приведенных для каждого из них условиях.

§2. Логарифмирование и потенцирование

При решении показательных и логарифмических уравнений особенно часто используются два преобразования: потенцирование и логарифмирование. Эти преобразования не являются равносильными. Логарифмированием уравнения $f(x) = g(x)$ по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называется переход к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. При этом область существования уравнения сужается, т. к. логарифмы существуют только у положительных чисел.

Например, $x^3 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 1. \end{array}\right.$ а $\lg x^3 = \lg x \Leftrightarrow x = 1$. Уравнения не равносильны, т. к. имеют разные множества решений.

Потенцированием называется переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$. При этом область определения расширяется, т. к. второе уравнение может существовать при любых $f(x), g(x)$, а первое – только при положительных. Поэтому запишем и запомним:

С11. Если $f(x) = g(x)$ и $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$, то $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

С12. Если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и $f(x) = g(x)$.

При решении логарифмического уравнения достаточно проверить положительность одной из функций, т. к. из последующего их равенства следует положительность и другой. Итак, из С11 и С12 следует условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}} \qquad \text{(УР Л1)}$$

§3. Показательные уравнения

Из монотонности показательной функции следует, что $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

Из свойств показательной функции следует, что, если $a > 0, a \neq 1$, то простейшее показательное уравнение $a^x = b$ при $b \leq 0$ не имеет решения, а при $b > 0$ имеет единственный корень $x = \log_a b$.

Для успешного решения большинства учебных примеров решающим является умение преобразовать исходное уравнение к более простому. Более простыми можно считать два основных уравнения:

1. $a^{f(x)} = b(x) \Leftrightarrow f(x) = \log_a b(x)$,
2. $g\left(a^{f(x)}\right) = 0$.

Уравнение 2 заменой переменной $a^{f(x)} = t$ сводится к уравнению $g(t) = 0$, у которого отыскиваются положительные корни, а затем решаются уравнения типа 1. Заметим, что

$$1^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow 1 = g(x), \quad 0^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0; \end{cases}$$

Пример 1. (МГУ, 1970). $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

♦ $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2\sqrt{3x^2-2x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right)^2 - 9\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2\right)\left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{-1}{3}; \end{array}\right. \\ \sqrt{3x^2-2x} = -2 \Leftrightarrow \varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ. $1, \frac{-1}{3}$. ♦

Пример 2. $8^x - 13\cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13\cdot 3^{3x} = 0.$

♦ $8^x - 13\cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13\cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 13\cdot 2^{2x}3^x - 2^x 3^{2x} + 13\cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{3x}\left(1 - 13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 13\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}\right) = 0 \qquad (*)$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$, тогда (*) примет вид $1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0.$

$1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0 \Leftrightarrow (1 - t^2)(1 - 13t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1; \frac{1}{13} \Rightarrow x = 0; -\log_{\frac{3}{2}} 13.$

Ответ: $0, -\log_{\frac{3}{2}} 13$. ♦

Пример 3. $500\cdot 8^x = 8\cdot 5^{\frac{1}{x}}.$

♦ $500\cdot 8^x = 8\cdot 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 5^3 2^2 2^{3x} = 2^3 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 5^{\frac{1}{x}-3} \Leftrightarrow (3x-1)\log_5 2 = \frac{1}{x} - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_5 2 - 3 \pm (\log_5 2 + 3)}{6\log_5 2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}, \\ x = -\log_2 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{3}, -\log_2 5$. ♦

Пример 4. $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} = 5.$ ♦ Это уравнение удается решить, используя то, что левая часть уравнения является строго убывающей функцией, которая любое положительное значение принимает только один раз. Подбором убеждаемся, что $x = -1$.

Ответ: -1.♦

Пример 5. (МГУ, 1997, псих. ф – т.) При каких действительных p уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2\cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

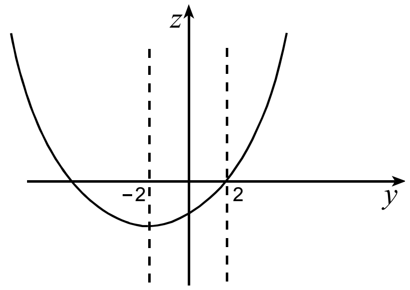
♦ $4^x+4\cdot 2^x+7+\dfrac{4}{2^x}+\dfrac{1}{4^x}-p=0\Leftrightarrow 4^{2x}+4\cdot 4^x\cdot 2^x+(7-p)\cdot 4^x+4\cdot 2^x+1=0.$

Пусть $t=2^x>0$. Тогда уравнение примет вид

$$t^4+4t^3+(7-p)t^2+4t+1=t^2\left(t^2+4t+(7-p)+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}\right)=0.$$

Это возвратное уравнение. Оно решается заменой переменных $y=t+\dfrac{1}{t}$, причем $y=\dfrac{t^2+1}{t}=\dfrac{(t-1)^2+2t}{t}=2+\dfrac{(t-1)^2}{t}\geq 2$ для любого $t>0$. Уравнение принимает вид

$$\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)+4\left(t+\frac{1}{t}\right)+(5-p)=y^2+4y+(5-p)=0.$$



Так как вершина параболы $z=y^2+4y+(5-p)$ расположена слева от оси z и ветви направлены вверх, то корень $y_0\geq 2$ существует тогда и только тогда, когда $z(2)\leq 0\Leftrightarrow 4+8+5-p\leq 0\Leftrightarrow p\geq 17.$

Ответ: $[17;+\infty)$ ♦

§4. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения считаются сложными. Во-первых, потому, что у логарифма есть область определения. Во-вторых, подлога1рифмические выражения могут быть любыми функциями, и надо помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат), и потеря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связано с ОДЗ логарифмов. Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать проверку. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он не может быть решением. Если же корень принадлежит ОДЗ, то надо подставить его в уравнение.

Основными типами логарифмических уравнений являются следующие уравнения. Для любых $a > 0, a \neq 1$

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ (УР Л1)

Из двух систем удобно выбирать ту, которая проще.

2. $g(\log_a f(x)) = 0.$

Пример 6. (МГУ, 1997, биофак) $\log_3 x + \log_3 (x+1) = 1.$

♦

$$\log_3 x + \log_3 (x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$. ♦

Пример 7. (МГУ, 1998, ф – т почв.)

♦ $\log_{0,5}\left(\log_4 \frac{1}{x}\right) + \log_4\left(\log_2\left(16x^2\right)\right) = 0.$

$$\log_{0,5}\left(\log_4 \frac{1}{x}\right) + \log_4\left(\log_2\left(16x^2\right)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_2\left(-\frac{\log_2 x}{2}\right) + \frac{\log_2(4 + 2\log_2 x)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ \log_2\left(4 + 2\log_2 x\right) = \log_2\left(-\dfrac{\log_2 x}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ 4 + 2\log_2 x = \dfrac{1}{4}\log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \pm 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{4-4\sqrt{2}}.$$

Ответ: $2^{4-4\sqrt{2}}$. ♦

Пример 8. (МГУ, 1999, псих. ф – т) $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$

♦ $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{2\log_7 x} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\log_7 x}\right)^2 + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_7 x} = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \log_7 x = \log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2} \Leftrightarrow x = 7^{\log_2 \frac{\sqrt{41}-5}{2}}.$$

Ответ: $7^{\log_2 \frac{\sqrt{41}-5}{2}}$. ♦

Особняком стоят уравнения и неравенства, которые нельзя отнести ни к показательным, ни к логарифмическим. Они содержат функции вида $\log_{a(x)} f(x)$ и $\left(a(x)\right)^{f(x)}$.

§5. Сложная экспонента. Уравнение вида $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим выражение $y(x) = a(x)^{f(x)}$. Что это за функция, какова ее область определения?

По определению, полагают, для любого $c > 0, c \neq 1, a(x) > 0$

$$\boxed{a(x)^{b(x)} = c^{b(x)\log_c a(x)}} \qquad (01)$$

Рассмотрим уравнение $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

ОДЗ: $a(x) > 0$.

$a(x)^{f(x)} = 10^{f(x)\lg a(x)}, a(x)^{g(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)}$, тогда

$10^{f(x)\lg a(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a(x) = g(x)\lg a(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg a(x)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg a(x) = 0,\\ f(x) = g(x).\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a(x) = 1,\\ f(x) = g(x).\end{array}\right.$ Следовательно,

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a(x) = 1,\\ f(x) = g(x).\end{array}\right. \text{ в ОДЗ.}} \qquad \text{(УР П3)}$$

или

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a(x) = 1,\\ \begin{cases}a(x) > 0,\\ f(x) = g(x).\end{cases}\end{array}\right.} \qquad \text{(УР П3*)}$$

Замечание. Мы не решаем уравнение $(-2)^x = -8$, потому что $(-2)^3 \neq (-2)^{\frac{12}{4}}$, где левая часть существует, а правая часть не определена (в уравнении нет ограничений для x, и оно может принимать рациональные значения!). Однако, мы решаем уравнение $(-2)^n = -8$, где ***заранее*** задано, что n – число целое (операции возведения в рациональную степень и натуральную степень разные! Вспомним, кстати,

что $\sqrt[3]{-8} \neq (-8)^{\frac{1}{3}}$, т. к. левая часть существует, а правая – нет).

Пример 9. Решите уравнение $x^{x^2} = x^{-2-3x}$.

♦ ОДЗ: $x > 0$.

В ОДЗ $x^{x^2} = x^{-2-3x} \Leftrightarrow 10^{x^2 \lg x} = 10^{(-2-3x)\lg x} \Leftrightarrow \lg x\left(x^2 + 3x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg x(x+2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Корни -1, -2 ***не входят в ОДЗ.*** Это, несмотря на то, что $(-1)^1=(-1)^1, (-2)^4=(-2)^4$.

Ответ: $\{1\}$. ♦

Пример 10. (МГУ, 1998, химфак.) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x+\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=2\left(\sqrt{2}\right)^x$$

имеет единственное решение?

♦ Сначала упростим левую часть уравнения. Замечаем, что

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=\frac{2^x}{\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x}.$$

Пусть $t=\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x$, тогда уравнение примет вид:

$$t+\frac{2^x}{t}=2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow t^2-2\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot t+2^x=\left(t-2^{\frac{x}{2}}\right)^2=0\Leftrightarrow t=2^{\frac{x}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=2^{\frac{x}{2}}\Leftrightarrow \text{В силу (УР П4)},$$

$$x\lg\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)=x\lg\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}=\sqrt{2}. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Мы видим, что при любом значении параметра a есть решение $x=0$, поэтому для единственности решения уравнения необходимо и достаточно, чтобы второе уравнение совокупности не имело решений.

ОДЗ (*): $x^2-3ax+6\geq 0$.

Если $x^2-3ax+6>0$, то $\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}>\sqrt{2}$.

Если $x^2-3ax+6=0$, то $\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}=\sqrt{2}$.

Заданное уравнение имеет единственное решение ($x=0$ является решением данного уравнения при любом a!), если уравнение

$x^2-3ax+6=0$ не имеет решений, что имеет место тогда и только тогда, когда $9a^2-24<0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3};\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. ♦

§6. Логарифмы с переменным основанием. Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$

Рассмотрим выражение $y(x)=\log_{a(x)} f(x)$.

По определению, для любого $c>0, c\neq 1$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x)=\frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}} \qquad (02)$$

т. е. $y(x)$ – это частное двух логарифмов, и областью определения (ОДЗ) является множество X, на котором

$$\underline{f(x)>0,}\ \underline{a(x)>0, a(x)\neq 1.}$$

Рассмотрим уравнение $\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$.

ОДЗ: $a(x)>0, a(x)\neq 1, f(x)>0, g(x)>0.$

Воспользуемся определением (02) и получим в ОДЗ

$$\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)\Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)}=\frac{\lg g(x)}{\lg a(x)}\Leftrightarrow \lg f(x)=\lg g(x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x) \text{ в ОДЗ.}} \qquad \text{(УР ЛЗ)}$$

Можно записать полное условие равносильности

$$\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)>0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ g(x)>0. \end{cases} \qquad \text{(УР ЛЗ*)}$$

Пример 11. (МФТИ, 1981) Решите уравнение
$2\log_x\left(4+\sqrt{x}\right)=2-\log_{\sqrt{x}} 2$.

♦ $2\log_x\left(4+\sqrt{x}\right)=2-\log_{\sqrt{x}} 2 \Leftrightarrow \log_x\left(4+\sqrt{x}\right)=1-\log_x 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_x\left(4+\sqrt{x}\right)=\log_x \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+\sqrt{x}=\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-8=0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=16.$

Ответ: 16. ♦

Метод интервалов для логарифмических и показательных неравенств.

В курсе математического анализа для 10-го класса доказывается теорема:

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и не обращается в 0 на открытом промежутке $(a;b)$, то $f(x)$ имеет один и тот же знак во всех внутренних точках отрезка $[a;b]$.

Это и есть основание для метода интервалов для непрерывной функции: найти нули $f(x)$ и определить знаки $f(x)$ на промежутках между соседними нулями, вычислив значения в пробных точках.

§7. Показательные неравенства

Рассмотрим неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на некотором промежутке X, где задано число $a>0$. Тогда $a^{f(x)}, a^{g(x)}$ – тоже непрерывны на X и к неравенству $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ применим метод интервалов. Его решение зависит от того, $a>1$ или $a<1$.

1) Если $a>1$, то $f(x)>g(x)$ и $(a-1)(f(x)-g(x))>0$.

2) Если $0<a<1$, то $f(x)<g(x)$ и опять $(a-1)(f(x)-g(x))>0$.

Верно и обратное:

1. если $(a-1)(f(x)-g(x))>0$, то при $a>1$ имеем $f(x)>g(x)$ и $a^{f(x)} > a^{g(x)}$;

2. если $0<a<1$, то $f(x)<g(x)$ и опять $a^{f(x)} > a^{g(x.)}$.

Таким образом, мы вывели условие равносильности

$$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x))>0} \qquad \text{(УР П1)}$$

При рассмотрении неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ меняется знак неравенства в (УР П1), и мы видим, что

знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$

(УР П2)

Пример 12. (МГУ, 1999, ф – т почв.) Решите неравенство $3\cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

♦ $3\cdot 2^{2\sqrt{2-x}} - 10\cdot 2^{\sqrt{2-x}} + 3 < 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{2-x}} - 3\right)\left(2^{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2-x}} - 3 < 0 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{2-x} < \log_2 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le 2-x < \log_2^2 3 \Leftrightarrow 2 - \log_2^2 3 < x \le 2.$

Ответ: $\left(2-\log_2^2 3; 2\right]$. ♦

Пример 13. (МГУ, 1999, мехмат.). Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2}+\frac{1}{9}\le 3^{x^2-2}+27^{2x+3}.$$

♦ $3^{(x+3)^2}+\frac{1}{9}\le 3^{x^2-2}+27^{2x+3}\Leftrightarrow 3^{x^2+6x+9}+3^{-2}\le 3^{x^2-2}+3^{6x+9}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{x^2}\left(3^{6x+9}-3^{-2}\right)-\left(3^{6x+9}-3^{-2}\right)\le 0\Leftrightarrow\left(3^{x^2}-3^0\right)\left(3^{6x+9}-3^{-2}\right)\le 0\Leftrightarrow$

В силу (УР П2), $x^2\left(6x+9+2\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x\le -\frac{11}{6}.\end{array}\right.$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{11}{6}\right]\cup\{0\}$. ♦

Пример 14. Решите неравенство $\dfrac{x^2+x-2}{\left(3^x-1\right)\left(2^{x^2}-16\right)}\ge 0.$

♦ $\dfrac{x^2+x-2}{\left(3^x-1\right)\left(2^{x^2}-16\right)}\ge 0\Leftrightarrow$ В силу (УР П2),

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-0)\left(x^2-4\right)}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -2,\\ \dfrac{x-1}{x(x-2)}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0;1]\cup(2;+\infty).$$

Ответ: $(0;1]\cup(2;+\infty)$. ♦

Пример 15. (МГУ, 2000, почв.) Решите неравенство $2^{x^2}\cdot 3^x<6.$

♦ $2^{x^2}\cdot 3^x<6\Leftrightarrow 2^{x^2}\cdot 2^{x\log_2 3}<2^{\log_2 6}\Leftrightarrow 2^{x^2+x\log_2 3}<2^{\log_2 6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x\log_2 3-\log_2 6<0\Leftrightarrow(x-1)(x+\log_2 6)<0\Leftrightarrow -\log_2 6<x<1.$

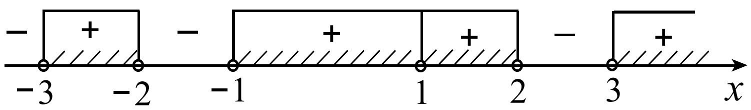
Ответ: $(-\log_2 6;1)$. ♦

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{\left(3^{x^2}-3\right)\left(2^{-x}-2^3\right)\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)}>0.$$

♦ $\dfrac{\left(3^{x^2}-3\right)\left(2^{-x}-2^3\right)\left(4^x-4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2-5x+6\right)}>0 \Leftrightarrow$ В силу (УР П2),

$$\frac{\left(x^2-1\right)\left(-x-3\right)\left(x-x^2-2x+2\right)}{(x-2)(x-3)}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x+1)(x+3)(x+2)}{(x-2)(x-3)}>0 \Leftrightarrow$$



С рисунка снимаем

Ответ: $(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(1;2)\cup(3;+\infty)$.♦

Пример 17. (МГУ,1973, биофак) Найти все значения параметра a, для каждого из которых неравенство $4^x-a\cdot 2^x-a+3\le 0$ имеет хотя бы одно решение.

♦Пусть $2^x=t>0$, тогда неравенство примет вид $t^2-at-a+3\le 0.$ Прежде всего, неравенство имеет решение, если дискриминант неотрицателен, т. е.

$$D=a^2+4a-12=(a+6)(a-2)\ge 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;-6]\cup[2;+\infty).$$

При этом, $t^2-at-a+3\le 0 \Leftrightarrow t\in\left[\dfrac{a-\sqrt{D}}{2}=t_1;\dfrac{a+\sqrt{D}}{2}=t_2\right].$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a, при которых неравенство верно хотя бы при одном <u>положительном</u> значении t. Для этого необходимо и достаточно, чтобы больший корень был положительным, т. е.

$$t_2=\frac{a+\sqrt{a^2+4a-12}}{2}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ a^2 + 4a - 12 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 2; \\ \begin{cases} a \le 0, \\ a^2 + 4a - 12 - a^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \end{array}\right. \Leftrightarrow a \ge 2 \Rightarrow$$

Ответ: $[2;+\infty)$. ♦

§8. Неравенства вида $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим неравенство $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$, где $a(x), f(x), g(x)$ – непрерывные функции. ОДЗ: $a(x) > 0$.

Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве c число e (можно взять любое другое допустимое число). Неравенство принимает вид $e^{f(x)\ln a(x)} > e^{g(x)\ln a(x)}$. Используя (УР П1), получим равносильное неравенство в ОДЗ

$(e-1)(f(x)\ln a(x) - g(x)\ln a(x)) = (e-1)(f(x) - g(x))\ln a(x) > 0,$

а, используя (УР Л5), найдем окончательное равносильное неравенство $(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0.$

Итак, мы вывели еще одно условие равносильности

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0} \text{ в ОДЗ.} \quad \text{(УР П5)}$$

или полное условие равносильности для строгого неравенства

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}} \quad \text{(УР П5*)}$$

Поэтому

> знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $\big(a(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ.

(УР П6)

Преимущество (УР П6) состоит в том, что, если $a(x), f(x), g(x)$ – рациональные функции, то за ***ОДИН ШАГ*** мы перешли к классическому варианту метода интервалов.

Пример 18. Решите неравенство

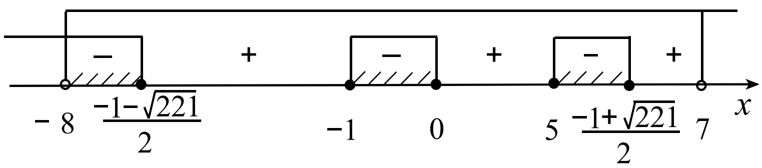
$$\left(56-x-x^2\right)^{x^3-2x^2} \ge \left(56-x-x^2\right)^{2x^2+5x}.$$

♦ ОДЗ: $56-x-x^2>0 \Leftrightarrow x^2+x-56<0 \Leftrightarrow x\in(-8;7)$.

В ОДЗ, в силу (УР П6), $\left(56-x-x^2\right)^{x^3-2x^2} \ge \left(56-x-x^2\right)^{2x^2+5x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(55-x-x^2\right)\left(x^3-2x^2-2x^2-5x\right)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{-1-\sqrt{221}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{221}}{2}\right)x(x+5)(x-1)\le 0 \Rightarrow$$



Ответ: $\left(-8;\frac{-1-\sqrt{221}}{2}\right]\cup[-1;0]\cup\left[5;\frac{-1+\sqrt{221}}{2}\right]$. ♦

§9. Логарифмические неравенства.
Неравенства вида $\log_a f(x)>0$ и $\log_a f(x)>\log_a g(x)$

Пусть $f(x)>0, f(x)$ непрерывна на $(c;d)$, тогда $\log_a f(x)$ тоже непрерывен на $(c;d)$, и для решения неравенства $\log_a f(x)>0$ применим метод интервалов. При решении этого неравенства значения

$f(x)$ в “пробных” точках придется сравнивать с единицей. Если “пробные” точки не очень удобные, то вычисления могут оказаться довольно громоздкими. Поэтому с самого начала учтем это.

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > 0(< 0)$, где a – заданное положительное число, $a \neq 1$.

ОДЗ: $f(x) > 0$.

Покажем, что имеет место условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > 0(< 0) \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-1) > 0(< 0) \text{ в ОДЗ}} \qquad \text{(УР Л4)}$$

Действительно,

1. Если $a > 1$, то $\log_a f(x) > 0(< 0)$ тогда и только тогда, когда $f(x) > 1(< 1)$, т. е. $(a-1)(f(x)-1) > 0(< 0)$.

2. Если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > 0(< 0)$ тогда и только тогда, когда $f(x) < 1(> 1)$, т. е. опять $(a-1)(f(x)-1) < 0(> 0)$. И, наоборот.

Если $(a-1)(f(x)-1) > 0(< 0)$, то

1. при $a > 1$ имеем $f(x) > 1(< 1)$, а тогда $\log_a f(x) > 0(< 0)$,

2. при $0 < a < 1$ имеем $f(x) < 1(> 1)$, а тогда $\log_a f(x) > 0(< 0)$.

Отсюда еще следует, что

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{знак } \log_a f(x) \text{ совпадает со знаком} \\ \text{произведения } (a-1)(f(x)-1) \text{ в ОДЗ}\end{array}} \qquad \text{(УР Л5)}$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$\boxed{\log_a f(x) > 0(< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-1) > 0(< 0). \end{cases}} \qquad \text{(УР Л5*)}$$

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$.

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Аналогично доказывается, что верно и такое условие равносильности

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-1)(f(x) - g(x)) > 0 (<0) \end{array} \text{ в ОДЗ}} \qquad \text{(УР Л6)}$$

а также полное условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x) - g(x)) > 0 (<0). \end{cases}} \qquad \text{(УР Л6*)}$$

Отсюда следует, что

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{знак разности } \log_a f(x) - \log_a g(x) \text{ совпадает со} \\ \text{знаком произведения } (a-1)(f(x) - g(x)) \text{ в ОДЗ} \end{array}} \qquad \text{(УР Л7)}$$

При решении простейших логарифмических неравенств, конечно, можно не использовать (УР Л4) и (УР Л6). Однако, (УР Л4) и (УРЛ6) дают возможность просто справиться с неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.

Пример 19. Решите неравенство

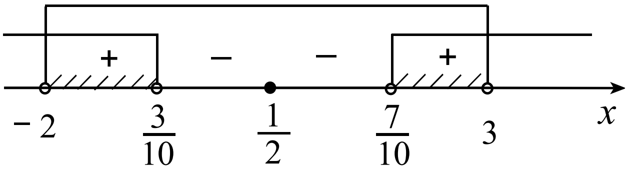
$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(6 + x - x^2)}{(10x-7)(10x-3)} \geq 0 .$$

♦ ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2 - 3x + 7 > 0 \Leftrightarrow x \in R, \\ -x^2 + x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2;3). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2;3).$

$\dfrac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(-x^2+x+6\right)}{\left(10x-7\right)\left(10x-3\right)}\geq 0 \Leftrightarrow$ В ОДЗ, в силу (УР Л7),

$$\frac{3x^2-3x+7+x^2-x-6}{\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)}=\frac{\left(2x-1\right)^2}{\left(x-\frac{3}{10}\right)\left(x-\frac{7}{10}\right)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};+\infty\right)\Rightarrow x\in\left(-2;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};3\right)\Rightarrow$$



Ответ: $\left(-2;\dfrac{3}{10}\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left(\dfrac{7}{10};3\right)$.

В этом примере разность логарифмов ***не меняет*** знак при переходе через точку $x=\dfrac{1}{2}$, а следующие нули находятся близко. “Пробные” точки подставлять затруднительно. ♦

Пример 20. (МГУ, 1998, мех – мат.) Решите неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\cdot\log_3\left(-2x-x^2\right)\geq\log_3\left(\frac{|x|}{3}+\frac{3}{2}\right)\cdot\log_2\left(-2x-x^2\right).$$

♦ОДЗ: $\begin{cases} x+5{,}5\geq 0\Leftrightarrow x\geq -5{,}5; \\ \sqrt{x+5{,}5}+\dfrac{x+2}{2}>0, \\ -2x-x^2>0\Leftrightarrow x\left(x+2\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-2;0\right). \end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-2;0\right).$

$$\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\log_3\left(-2x-x^2\right)\geq\log_3\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\log_2\left(-2x-x^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)\log_2\left(-2x-x^2\right)\geq \log_2\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\log_2\left(-2x-x^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(-2x-x^2\right)\left(\log_2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1\right)-\log_2\left(\frac{|x|}{2}+\frac{3}{2}\right)\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

В ОДЗ, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

$$\left(-2x-x^2-1\right)\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+\frac{x}{2}+1-\frac{|x|}{2}-\frac{3}{2}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

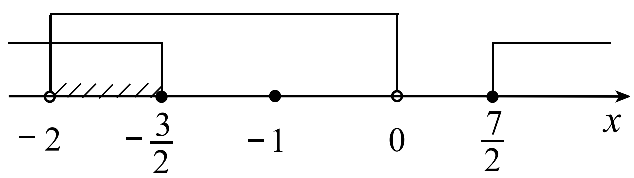
$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}+x-\frac{1}{2}\right)\leq 0 \ \ (|x|=-x \text{ в ОДЗ}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(\sqrt{x+\frac{11}{2}}-\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)\leq 0\Leftrightarrow \text{ Т. к. } \left(\frac{1}{2}-x\right)>0 \text{ в ОДЗ}$$

$$(x+1)^2\left(x+\frac{11}{2}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\left(-x^2+2x+\frac{21}{4}\right)\leq 0\Leftrightarrow (x+1)^2\left(x-\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\left(\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2};+\infty\right)\cup\{-1\}\right)\cap \text{ ОДЗ. Учитываем ОДЗ:}$$



Получаем

Ответ: $\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\{-1\}$. ♦

Пример 21. (МФТИ, 1992) $\dfrac{1}{x}\log_7\left(\dfrac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)>1$.

♦ ОДЗ: $\dfrac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{2}\cdot 7^{x}-2>0 \Leftrightarrow x>\log_7\dfrac{4}{9}$.

Тогда в ОДЗ $\dfrac{1}{x}\log_7\left(\dfrac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)>1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}\log_7\left(\dfrac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)>\dfrac{x}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_7\left(\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)-x}{x} \equiv \frac{\log_7\left(\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}\right)-\log_7 7^{x}}{x}>0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ В ОДЗ, в силу (УР Л7),

$$\frac{\frac{9}{2}-2\cdot 7^{-x}-7^{x}}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{7^{2x}-\frac{9}{2}\cdot 7^{x}+2}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{\left(7^{x}-4\right)\left(7^{x}-\frac{1}{2}\right)}{x}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(7^{x}-7^{\log_7 4}\right)\left(7^{x}-7^{\log_7\frac{1}{2}}\right)}{x}<0 \Leftrightarrow$$ В силу (УР П2),

$$\frac{\left(x-\log_7 4\right)\left(x-\log_7\frac{1}{2}\right)}{x}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\log_7\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\log_7 4\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ С учётом ОДЗ, $x\in\left(\log_7\dfrac{4}{9};\log_7\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0;\log_7 4\right)$.

Ответ: $\left(\log_7\dfrac{4}{9};\log_7\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0;\log_7 4\right)$. ♦

§10. Неравенства для логарифмов с переменным основанием

Рассмотрим неравенство $\log_{a(x)} f(x)>0$, где $a(x), f(x)$ непрерывны на промежутке X.

ОДЗ: $a(x)>0, a(x)\neq 1, f(x)>0.$ Оказывается, что и в этом случае знак функции $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ (УР Л9)

и имеет место условие равносильности

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x)>0(<0) \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-1)>0(<0) \text{ в ОДЗ.}} \quad \text{(УР Л10)}$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\log_{a(x)} f(x)>0(<0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)>0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1)>0(<0). \end{cases} \quad \text{(УР Л10*)}$$

Для нестрогого неравенства это условие выглядит по-другому.

$$\log_{a(x)} f(x)\ge 0(\le 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x)>0, \\ a(x)\ne 1, \\ f(x)>0, \\ (a(x)-1)(f(x)-1)\ge 0(\le 0). \end{cases} \quad \text{(УР Л11)}$$

Действительно, по определению, $\log_{a(x)} f(x)=\dfrac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$, $a(x)>0, a(x)\ne 1, f(x)>0.$

В силу предыдущего условия равносильности (УР Л5), знаки $\lg f(x), \lg a(x)$ совпадают со знаками разностей $f(x)-1$ и $a(x)-1$ соответственно. Поэтому знак $\dfrac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$ совпадает со знаком частного $\dfrac{f(x)-1}{a(x)-1}$, или со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-1)$.

Рассмотрим неравенство $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$, где $a(x)$, $f(x), g(x)$ непрерывные функции и $a(x) > 0, a(x) \neq 1$.

По определению, $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) = \dfrac{\lg f(x) - \lg g(x)}{\lg a(x)}$, и, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $\left(a(x)-1\right)\left(f(x)-g(x)\right)$ в ОДЗ.

(УР Л12)

Из полученного условия равносильности следует, что

$\log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow$ $\left(a(x)-1\right)\left(f(x)-g(x)\right) > 0 (< 0)$ в ОДЗ.

(УР Л13)

Заметим, что из (УР Л12) автоматически следует, что $a(x) \neq 1$, поэтому при решении ***строгих неравенств*** условие $\underline{a(x) \neq 1}$ в ОДЗ можно ***опустить*** и так записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \left(a(x)-1\right)\left(f(x)-g(x)\right) < 0. \end{cases}}$$

(УРЛ 13*)

Преимущество и красота приведенных условий равносильности состоит в том, что мы за один шаг освободились от логарифмов и переменных оснований. Теперь, если основание логарифма и подлогарифмическое выражение являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

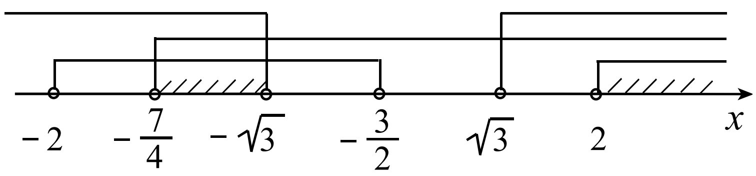
Заметим, что все условия равносильности ***формально*** точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

Пример 22. (МФТИ, 1980) Решите неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$.

♦В силу (УР Л10), $\log_{x^2-3}(4x+7)>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+7>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{7}{4}, \\ x^2-3>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right), \\ \left(x^2-3-1\right)\left(4x+7-1\right)>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{7}{4};-\sqrt{3}\right)\cup(2;+\infty).$$



Ответ: $\left(-\dfrac{7}{4};-\sqrt{3}\right)\cup(2;+\infty)$. ♦

Но, как показывает практика, не всегда этим удобно пользоваться полными условиями равносильности. Это происходит, если входящие в условия равносильности неравенства громоздки. Тогда удобно отделить нахождение ОДЗ от решения основного неравенства, как мы часто и будем делать.

Пример 23. (МФТИ, 1994). Решите неравенство

$$\log_8\left(\frac{1}{3}-x\right)\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3}-x\right)>\log_2\frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

♦ ОДЗ: $\begin{cases} \frac{1}{3} - x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \\ 2x + \frac{1}{3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{6}. \\ 2x + \frac{1}{3} \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pm 3 - 1}{6} \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3};\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right).$$

$$\log_8\left(\frac{1}{3} - x\right) \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} - x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{1}{3} - x\right) \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2\left(\frac{1}{3} - x\right) - \frac{2}{3}\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right| \left(\log^2_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) - 3\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) + 2\right) > 0 \Leftrightarrow$$

(т. к. $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$)

$$\log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right| \left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) - 1\right)\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) - 2\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left|2x + \frac{1}{3}\right| \left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) - \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left|2x + \frac{1}{3}\right|\right)\left(\log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(\frac{1}{3} - x\right) -\right.$$

$$\left. - \log_{\left|2x+\frac{1}{3}\right|}\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2 \right) > 0 \Leftrightarrow$$

В ОДЗ, в силу (УР Л12),

$$\left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)^3\left(\frac{1}{3}-x-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(\frac{1}{3}-x-4x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}\right)>0\Leftrightarrow$$

(т. к. в ОДЗ $\frac{1}{3}-x>0$)

$$\Leftrightarrow\left(\left|2x+\frac{1}{3}\right|-1\right)\left(\left|\frac{1}{3}-x\right|-\left|2x+\frac{1}{3}\right|\right)\left(36x^2+21x-2\right)<0\Leftrightarrow$$

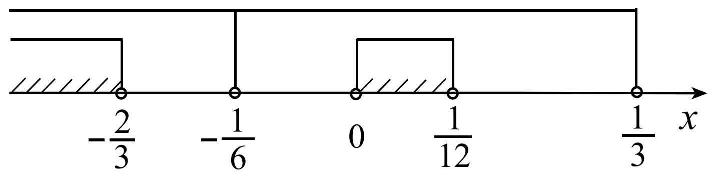
$$\Leftrightarrow\left(2x+\frac{1}{3}-1\right)\left(2x+\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}-x-2x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-x+2x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)^3\left(x-\frac{1}{12}\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Учтем ОДЗ



и получаем

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0;\frac{1}{12}\right)$. ♦

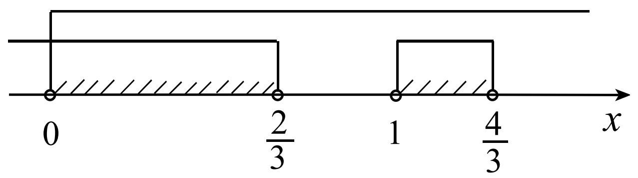
Пример 24. (МФТИ, 1996). Решите неравенство

$$\log_{|3x-3|}\left(25^x-9^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right).$$

♦ $\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)\left(5^x-3^x\right)<\log_{|3x-3|}\left(5^x+3^x\right)+\log_{|3x-3|}\left(5^{x-1}+3^{x-1}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x-3| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, \\ 5^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0, \\ \left(|3x-3|-1\right)\left(5^x - 3^x - 5^{x-1} - 3^{x-1}\right) < 0 \Leftrightarrow \left(|3x-3|-1\right)\left(\dfrac{4}{5}5^x - \dfrac{4}{3}3^x\right) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

В силу (УР М5) и (УР П6),



$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ (3x-4)(3x-2)\left(\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{5}{3}\right)^0\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{4}{3}\right)\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(1; \dfrac{4}{3}\right)$.

Контрольные вопросы

(это примеры типа ЕГЭ, серия А и В)

1(1). (Демо ЕГЭ –2006) Найдите значение выражения $\dfrac{1}{2} \cdot 2^{\log_2 10}$.

2(2). Решите уравнение $\log_2 (3x+1)^4 = 16$.

3(2). Найдите сумму корней уравнения $\lg\left(x^2 - 2x - 4\right) = \lg(2 - x)$.

4(2). Найдите сумму корней уравнения $\log_2 (x+3) + \log_2 (x-4) = 3$.

5(2). Решите уравнение $\log_2(x+1)^2 + 2\log_2(3-x) = 2\log_2 12.$

6(2). (Демо ЕГЭ –2006) Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0{,}04.$

7(2). Найдите область определения функции $y(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 81}.$

8(2). Найдите область определения функции $y = \sqrt{3 - \lg x}.$

9(2). Решите неравенство $7^{\frac{1}{x}} \geq 7.$

10(2). Решите неравенство $9^x - 5^{x+1} < 4\cdot 9^{x-1} - 16\cdot 5^{x-1}.$

11(2). Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x+7) \geq -2.$

12(3). Найдите произведение всех корней уравнения

$$\sqrt{4(\log_2 t)^3 + 8(\log_2 t)^2 - 5\log_2 t} = 1 - 2\log_2 t.$$

Задачи

(такие задачи могут входить в ЕГЭ, серия С)

1(2). (Демо ЕГЭ –2006) При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = \log_2(3-x)$ будут отличаться меньше, чем на 1?

Решите неравенства 2 – 10:

2(3). $\left|\log_2(4+x) - \log_2(-1-x)\right| < 1.$

3(3). $\dfrac{\left(3^{x^2} - 3\right)\left(2^{-x} - 2^3\right)\left(4^x - 4^{x^2+2x-2}\right)}{\left(x^2 - 5x + 6\right)} > 0.$

4(3). $\dfrac{\left(\log_{\frac{1}{2}} x - 2\right)\left(3^{x^2} - 9\right)\left(x^2 - 5x + 6\right)}{\left(\log_2 x + 1\right)\left(\log_3 x + 4\right)} \leq 0.$

5(3). $\dfrac{(4x+25)(4x+27)\log_{3-\sqrt{5}}\left(77-4x-x^2\right)}{\left(2^{x^2-2x}-2^{x+4}\right)}\geq 0.$

6(3). (МГУ, 1997, ф-т почв.) $\dfrac{(\log_2 3)^x-(\log_2 3)^2}{(\log_2 3)^{-x}-x\left(\log_{2^x} 3\right)}>0.$

7(3). (МГУ, 2000) $\log_2 x\leq\dfrac{8\log_2 x-2}{\log_2 x+5}.$

8(3). (МАИ) $\sqrt{\log_2 x}+\sqrt{5+\log_{0,5} x}\leq 3.$

9(4). (МФТИ, 1997) $\log_{|2x+1|} x^2\geq 2$.

10(5). (МФТИ, 2004) $\dfrac{\log_{x^2} 9}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+\log_{x^2}(x+1)}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{\log_3(x+1)-\log_9 x^4}.$

11(5). (ЕГЭ -2003) Из области определения функции $y=\log_7\left(a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найдите все значения, при которых такая сумма будет больше 7, но меньше 11.

12(5). (Типа Демо –2006) Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства $\log_{\frac{x}{4}-1}\left(\log_4\dfrac{x-22}{x-16}\right)\geq 0,$ а остальные **<u>не являются</u>** решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

