

§4. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения считаются сложными. Во-первых, потому, что у логарифма есть область определения. Во-вторых, подлогарифмические выражения могут быть любыми функциями, и

надо помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат), и потеря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связано с ОДЗ логарифмов. Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать проверку. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он не может быть решением. Если же корень принадлежит ОДЗ, то надо подставить его в уравнение.

Основными типами логарифмических уравнений являются следующие уравнения. Для любых $a > 0, a \neq 1$

$$1. \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \quad (\text{УР Л1})$$

Из двух систем удобно выбирать ту, которая проще.

$$2. g(\log_a f(x)) = 0.$$

Пример 6. (МГУ, 1997, биофак) $\log_3 x + \log_3(x+1) = 1$.

◆

$$\log_3 x + \log_3(x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{13} - 1}{2}$. ◆

Пример 7. (МГУ, 1998, ф – т почв.)

◆ $\log_{0,5} \left(\log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0$.

$$\log_{0,5} \left(\log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_2 \left(-\frac{\log_2 x}{2} \right) + \frac{\log_2 (4 + 2 \log_2 x)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ \log_2(4 + 2\log_2 x) = \log_2\left(-\frac{\log_2 x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ 4 + 2\log_2 x = \frac{1}{4}\log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \pm 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{4-4\sqrt{2}}.$$

Ответ: $2^{4-4\sqrt{2}}$. ♦

Пример 8. (МГУ, 1999, псих. ф – т) $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0$.

$$\diamond x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_2 x})^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\log_7 x} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_7 x})^2 + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_7 x} = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \log_7 x = \log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2} \Leftrightarrow x = 7^{\log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2}}.$$

Ответ: $7^{\log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2}}$. ♦

Особняком стоят уравнения и неравенства, которые нельзя отнести ни к показательным, ни к логарифмическим. Они содержат функции вида $\log_{a(x)} f(x)$ и $(a(x))^{f(x)}$.