§2. Логарифмирование и потенцирование

При решении показательных и логарифмических уравнений особенно часто используются два преобразования: потенцирование и логарифмирование. Эти преобразования не являются равносильными. Логарифмированием уравнения $f(x) = g(x)$ по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называется переход к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. При этом область существования уравнения сужается, т. к. логарифмы существуют только у положительных чисел.

Например, $x^3 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 1. \end{array}\right.$ а $\lg x^3 = \lg x \Leftrightarrow x = 1$. Уравнения не равносильны, т. к. имеют разные множества решений.

Потенцированием называется переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$. При этом область определения расширяется, т. к. второе уравнение может существовать при любых $f(x), g(x)$, а первое – только при положительных. Поэтому запишем и запомним:

С11. Если $f(x) = g(x)$ и $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$, то $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

С12. Если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и $f(x) = g(x)$.

При решении логарифмического уравнения достаточно проверить положительность одной из функций, т. к. из последующего их равенства следует положительность и другой. Итак, из С11 и С12 следует условие равносильности

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}} \qquad \text{(УР Л1)}$$

