Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Квадратные корни

Задание №3 для 8-х классов

(2005-2006 учебный год)

г. Долгопрудный, 2005

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

Составитель: Т.Х. Яковлева, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

математика: задание №3 для 8-х классов (2005-2006 учебный год). - М.: МФТИ, 2005, 20с.

Составитель:
Яковлева Тамара Харитоновна
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 15.12.05
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,25
Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 2000. Заказ №13-з.

Федеральная заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© ФЗФТШ при МФТИ, 2005

Введение

Дорогие ребята!

Вы получили очередное задание по математике. В этом задании мы знакомим вас с важным математическим понятием – арифметическим корнем. Постарайтесь хорошо справиться с этим заданием. Оно подготовит вас к решению следующего задания, в котором мы рассмотрим квадратные уравнения.

§1. Определение арифметического квадратного корня

Рассмотрим простейшую задачу. Пусть площадь квадрата равна 25. Требуется определить сторону квадрата. Если сторона квадрата равна x, то для нахождения длин сторон квадрата получаем уравнение $x^2 = 25$. Этому уравнению удовлетворяют два числа: 5 и -5. Эти числа называют квадратными корнями числа 25. Заметим, что один корень является положительным, а второй корень является отрицательным числом.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Обозначают арифметический квадратный корень так: $\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$; $\sqrt{0} = 0$.

Равенство $\sqrt{a} = b$ является верным, если выполняются два условия: 1) $b \geq 0$ и 2) $b^2 = a$.

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла, т. к. квадрат любого неотрицательного числа – число неотрицательное. Поэтому выражения $\sqrt{-49}$ и $\sqrt{-3{,}5}$ не имеют смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ и $\sqrt{a^2} = |a|$.

Докажем, что, действительно, $\sqrt{a^2} = |a|$. Если $a \geq 0$, то из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{a^2} = |a|$.

Если же $a < 0$, то $-a > 0$ и $(-a)^2 = a^2$. Таким образом, арифметический корень $\sqrt{a^2}$ равен a, если $a \geq 0$ и равен $(-a)$, если $a < 0$, т. е. $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 1. Найдите значение выражения:

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

а) $2\sqrt{12{,}25}-0{,}1\cdot\sqrt{0{,}25}$; б) $\sqrt{(-9)^2}$; в) $\sqrt{-16{,}2}$.

а) Из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{12{,}25}=3{,}5$, т. к. $3{,}5>0$ и $3{,}5^2=12{,}25$; $\sqrt{0{,}25}=0{,}5$, т. к. $0{,}5>0$ и $0{,}5^2=0{,}25$. Получаем: $2\cdot 3{,}5-0{,}1\cdot 0{,}5=7-0{,}05=6{,}95$.

б) $\sqrt{(-9)^2}=9$, т. к. $\sqrt{(-9)^2}=|-9|=9$.

в) Данное выражение не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа является неотрицательным числом.

Пример 2. При каких x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{3x}{\sqrt{x-1}}$; б) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$?

а) Выражение $\sqrt{x-1}$ определено, если $x-1\geq 0$, т. е. при $x\geq 1$. Но так как $\sqrt{x-1}$ стоит в знаменателе, то данное выражение определено, если $x>1$.

б) Выражение $\sqrt{x}$ определено при $x\geq 0$, а выражение $\sqrt{x+2}$ определено при $x+2\geq 0, x\geq -2$. Таким образом, при $x\geq 0$ определены оба корня. При таких x имеем: $\sqrt{x}\geq 0$ и $\sqrt{x+2}>0$, поэтому знаменатель при $x\geq 0$ не обращается в нуль, значит, при $x\geq 0$ данное выражение имеет смысл.

Пример 3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}+2=0$, б) $\sqrt{x}-3=0$, в) $\sqrt{5x+6}=6$, г) $\sqrt{3x-7}=-5$.

а) Арифметический корень $\sqrt{x}$ определен при $x\geq 0$, при этом $\sqrt{x}\geq 0$, значит, при любом $x\geq 0$ выражение $\sqrt{x}+2\geq 2$, поэтому данное уравнение не имеет решений.

б) $\sqrt{x}=3$, из определения арифметического корня следует, что $\left(\sqrt{x}\right)^2=x=9$, т. е. $x=9$ является корнем уравнения.

в) Предположим, что данное уравнение имеет решение, тогда $\left(\sqrt{5x+6}\right)^2=5x+6=6^2$. Отсюда уже видно, что $5x+6>0$, т. е. выражение $\sqrt{5x+6}$ определено. Решаем уравнение: $5x+6=36$, $5x=30$, $x=6$.

г) Уравнение не имеет смысла, т. к. арифметический корень из неотрицательного числа – число неотрицательное, а число $-5<0$.

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

§2. Уравнение $x^2 = a$

Если $a < 0,$ то уравнение $x^2 = a$ не имеет решений. Если $a = 0,$ то уравнение имеет единственное решение $x = a.$ Рассмотрим теперь уравнение $x^2 = a$ при $a > 0.$

Рассмотрим графики функций $y = x^2$ и $y = a.$ Если $a = 1,$ то уравнение $x^2 = 1$ имеет два корня: 1 и $-1.$ Если $a = 4,$ то уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня: 2 и $-2.$ Один из корней совпадает с арифметическим корнем из числа $4,$ а второй корень – число, противоположное первому корню.

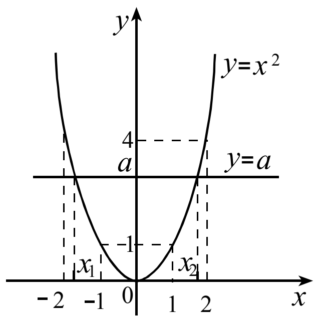


Рис. 1

Рассмотрим теперь уравнение $x^2 = 2.$

В первом задании мы уже говорили о том, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. Арифметический корень $\sqrt{2}$ является числом иррациональным.

Пример 1. Докажите, что число $\sqrt{7}$ является числом иррациональным.

$\triangle$ Предположим, что $\sqrt{7}$ является числом рациональным, т. е. $\sqrt{7} = \frac{m}{n},$ где n – натуральное число, m – целое число, и дробь $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Из определения арифметического корня следует, что m должно также быть натуральным числом. Тогда

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 = = \frac{m^2}{n^2},\ 7n^2 = m^2.$$

Левая часть полученного выражения делится на $7,$ тогда и m^2 делится на $7,$ т. е. m делится на $7,$ тогда $m = 7k,$ $7n^2 = 49k^2, n^2 = 7k^2.$ Отсюда следует, что и число n делится на $7,$ но тогда дробь $\frac{m}{n}$ является сократимой дробью, что противоречит условию. Следовательно, число $\sqrt{7}$ является иррациональным. ▲

Из рисунка 1 следует, что если $a > b \geq 0,$ то $\sqrt{a} > \sqrt{b}.$ Поэтому, например, $\sqrt{119} > \sqrt{80}; \sqrt{2,37} > \sqrt{1,5}.$

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

Пример 2. Сравните числа $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \frac{1}{2}\sqrt{47}.$

$\triangle$ Из определения арифметического корня следует, что $a^2 = 4 \cdot 3 = 12;\ b^2 = \frac{1}{4} \cdot 47 = 11\frac{3}{4}.$ Так как $12 > 11\frac{3}{4},$ то число $a > b.$ ▲

Пример 3. Найдите значение выражения:

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 5\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}.$$

$\triangle$ $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3;\ 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 \cdot 3 = 6.$

Получаем: $3 - 5 \cdot 3 + 6 = -6.$ ▲

Пример 4. Между какими соседними натуральными числами расположено число $a = \frac{1}{3}\sqrt{209}.$

$\triangle$ $a^2 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{209}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 209 = 23\frac{2}{3}.$ Заметим, что $16 < 23\frac{2}{3} < 25,$ поэтому $\sqrt{16} < a < \sqrt{25},$ т. е. $4 < a < 5.$ ▲

§3. Свойства арифметического квадратного корня

В школьном учебнике у вас доказываются две теоремы.

Теорема 1. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0,$ то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$

Теорема 2. Если $a \geq 0$ и $b > 0,$ то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

Пример 1. Найдите значение выражения (без микрокалькулятора):

а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175};$ б) $\sqrt{5\frac{11}{49}};$ в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}};$

г) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}};$ д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4}.$

$\triangle$ а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175} = \sqrt{175 \cdot 175} = 175.$

б) $\sqrt{5\frac{11}{49}} = \sqrt{\frac{256}{49}} = \frac{16}{7}.$

в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}} = \sqrt{\frac{75}{192}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}.$

г) $\sqrt{\dfrac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}=\sqrt{\dfrac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}}=\sqrt{\dfrac{73\cdot 225}{73\cdot 841}}=$

$=\sqrt{\dfrac{225}{841}}=\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}}=\dfrac{15}{29}.$

д) $\sqrt{16^3\cdot 4^4}=\sqrt{\left(4^2\right)^3\cdot 4^4}=\sqrt{4^6\cdot 4^4}=\sqrt{4^{10}}=\sqrt{\left(4^5\right)^2}=4^5.$

Можно решать и другим способом.

$\sqrt{16^3\cdot 4^4}=\sqrt{16^2\cdot 16\cdot 4^4}=\sqrt{16^2}\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{\left(4^2\right)^2}=16\cdot 4\cdot 4^2=$

$=4^2\cdot 4\cdot 4^2=4^5.$ ▲

Рассмотрим $\sqrt{48}$. Преобразуем это выражение: $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=$ $=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$

В этом случае мы говорим, что множитель 4 вынесли из под знака корня.

Теперь рассмотрим выражение $5\sqrt{7}$, преобразуем его:

$$5\sqrt{7}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{25\cdot 7}=\sqrt{175}.$$

В этом случае говорим, что множитель 5 внесли под знак корня.

Пример 2. Вынесите множитель из под знака корня:

а) $\sqrt{\left(5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{17}-\sqrt{11}\right)^3\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5}$;

в) $-\sqrt{-a^4b^{11}}$; г) $\sqrt{21(xy)^2}$, если $xy\le 0$.

Δ Так как $\sqrt{a^2}=|a|$, то $\sqrt{\left(5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right)^2}=\left|5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right|$.

Определим знак числа $5\sqrt{13}-4\sqrt{19}$. Числа $5\sqrt{13}$ и $4\sqrt{19}$ – положительные. Рассмотрим их квадраты: $\left(5\sqrt{13}\right)^2=25\cdot 13=325$ и $\left(4\sqrt{19}\right)^2=16\cdot 19=304$. Так как $304<325$, то $\sqrt{304}<\sqrt{325}$, т. е. $5\sqrt{13}>4\sqrt{19}$, поэтому $\left|5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right|=5\sqrt{13}-4\sqrt{19}$.

б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^3\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^2\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^4\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}=$

$=\left|\sqrt{7}-\sqrt{11}\right|\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}.$

Число $\sqrt{7} < \sqrt{11}$, т. к. $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7, \left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$ и $7 < 11$. Поэтому

$$\sqrt{7} - \sqrt{11} < 0, \text{ т. е. } \left|\sqrt{7} - \sqrt{11}\right| = \sqrt{11} - \sqrt{7}.$$

Окончательно получаем: $\left(\sqrt{11} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)^2 \sqrt{\left(\sqrt{7} - \sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)}$.

в) Так как $a^4 \geq 0$, то корень определен, если $-b^{11} \geq 0$, т. е. $b^{11} \leq 0, b \leq 0$.

$$-\sqrt{a^4\left(-b^5\right)^2(-b)} = -a^2\left(-b^5\right)\sqrt{-b} = a^2 b^5 \sqrt{-b}.$$

г) $\sqrt{21(xy)^2} = |xy|\sqrt{21} = -xy\sqrt{21}$. ▲

Пример 3. Внесите множитель под знак корня:

а) $\left(5 - \sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2} + 3}$; б) $(2a - 1)\sqrt{1 - 2a}$; в) $-3xy\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}$.

Δ При решении этих примеров используем формулу $\sqrt{a^2} = |a|$.

а) Число $5 - \sqrt{37} < 0$, т. к. $5^2 = 25$, $\left(\sqrt{37}\right)^2 = 37$ и $25 < 37$. Поэтому $\left(5 - \sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2} + 3} = -\left(\sqrt{37} - 5\right)\sqrt{\sqrt{2} + 3} = -\sqrt{\left(\sqrt{37} - 5\right)^2\left(\sqrt{2} + 3\right)}$.

б) Корень $\sqrt{1 - 2a}$ определен, если $1 - 2a \geq 0, 2a \leq 1, a \leq \dfrac{1}{2}$. При таких a выражение $2a - 1 < 0$. Поэтому

$$(2a - 1)\sqrt{1 - 2a} = -(1 - 2a)\sqrt{1 - 2a} = -\sqrt{(1 - 2a)^2(1 - 2a)} = -\sqrt{(1 - 2a)^3}.$$

в) Корень $\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}$ определен, если $xy < 0$. Поэтому

$$-3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = 3(-xy)\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}} = \sqrt{9(-xy)^2\left(-\frac{1}{(xy)^3}\right)} = \sqrt{\frac{-9}{xy}}.$$

Пример 4. Сравните числа a и b:

а) $a = \sqrt{3} + \sqrt{11}$ и $b = \sqrt{6} + \sqrt{8}$;

б) $a = 2 - \sqrt{3}$ и $b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$;

в) $a = \dfrac{2}{5 + 3\sqrt{3}} - \dfrac{2}{5 - 3\sqrt{3}}$ и $b = \sqrt{110}$.

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

Δ а) Числа a и b положительные. Рассмотрим квадраты этих чисел. Имеем: $a^2 = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{11} + 11 = 14 + 2\sqrt{33}$, $b^2 = 6 + 2\sqrt{6}\sqrt{8} + 8 =$ $= 14 + 2\sqrt{48}$. Так как $48 > 33$, то $\sqrt{48} > \sqrt{33}, 2\sqrt{48} > 2\sqrt{33}$, поэтому $b^2 > a^2$ и $b > a$.

б) Число $a > 0$, т. к. $2^2 > \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$. Число $7 - 4\sqrt{3} > 0$, т. к. $7^2 > \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$. Число b определено и оно больше нуля.

Следовательно, оба числа a и b положительные. Рассмотрим их квадраты. $a^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$, $b^2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Следовательно, $a = b$.

в) $a = \dfrac{2}{5 + 3\sqrt{3}} - \dfrac{2}{5 - 3\sqrt{3}}$.

Приводим дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{10 - 6\sqrt{3} - 10 - 6\sqrt{3}}{\left(5 + 3\sqrt{3}\right)\left(5 - 3\sqrt{3}\right)} = \frac{-12\sqrt{3}}{-2} = 6\sqrt{3} = \sqrt{108}.$$

Так как $110 > 108$, то $\sqrt{110} > \sqrt{108}$, поэтому $b > a$.

Пример 5. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{2}{3\sqrt{5} - \sqrt{7}}$; б) $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2} + \sqrt{5}}$.

Δ Эту задачу надо понимать так: следует так преобразовать дробь, чтобы в знаменателе отсутствовали квадратные корни.

При решении этих задач полезно использовать формулу

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

а) Умножим числитель и знаменатель дроби на $3\sqrt{5} + \sqrt{7}$, получаем:

$$\frac{2\left(3\sqrt{5} + \sqrt{7}\right)}{\left(3\sqrt{5} - \sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{5} + \sqrt{7}\right)} = \frac{6\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{\left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{45 - 49} = -\frac{3\sqrt{5} + 7}{2}.$$

б) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(3 - \sqrt{2}\right) - \sqrt{5}$, получаем: $\dfrac{\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(\left(3 - \sqrt{2}\right) - \sqrt{5}\right)}{\left(\left(3 - \sqrt{2}\right) + \sqrt{5}\right)\left(\left(3 - \sqrt{2}\right) - \sqrt{5}\right)} =$

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

$$= \frac{3-\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{2}-2-\sqrt{10}}{\left(9+2-6\sqrt{2}\right)-5} = \frac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{6\left(1-\sqrt{2}\right)}.$$

В полученной дроби умножаем числитель и знаменатель на $1+\sqrt{2}$, получаем: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)}{6(1-2)} =$

$$= -\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4-\sqrt{5}-\sqrt{10}-\sqrt{10}-\sqrt{20}}{6} =$$

$$= -\frac{5+3\sqrt{2}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{6}. \blacktriangle$$

§4. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Покажем на примере, как можно тождественными преобразованиями упрощать выражения, содержащие квадратные корни. При этом мы будем пользоваться правилами, которые указали в предыдущем параграфе, как, например, правило произведения корней, правило деления корней, правило вынесения множителя из-под знака корня и т. д.

Пример 1. Упростите выражение $5\sqrt{18}+7\sqrt{50}-30\sqrt{2}$.

Δ Заметим, что $5\sqrt{18}=5\sqrt{9\cdot 2}=5\sqrt{9}\sqrt{2}=15\sqrt{2}$ и $7\sqrt{50} = 7\sqrt{25\cdot 2}=7\sqrt{25}\sqrt{2}=35\sqrt{2}$.

В итоге получаем $15\sqrt{2}+35\sqrt{2}-30\sqrt{2}=20\sqrt{2}$. ▲

Пример 2. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}$.

Δ а) Заметим, что $7=4+3=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$, тогда

$7+4\sqrt{3}=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$. Поэтому

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}$.

б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=$

$=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$.

в) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}=\sqrt{(a-3)+4+4\sqrt{a-3}}=$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}\right)^2+2^2+2\cdot 2\sqrt{a-3}}=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}+2\right)^2}=\sqrt{a-3}+2. \blacktriangle$$

Пример 3. Сократите дроби:

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt{7a}-\sqrt{7b}}$; б) $\dfrac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}$; г) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Δ а) Заметим, что

$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2$, $\sqrt{7a}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{a}$, $\sqrt{7b}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{b}$,

подставляем эти выражения в данную дробь:

$$\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{7}\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{7}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{7}}.$$

б) $\dfrac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=\dfrac{\left(8\sqrt{a}\right)^2-\left(7\sqrt{b}\right)^2}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=\dfrac{\left(8\sqrt{a}-7\sqrt{b}\right)\left(8\sqrt{a}+7\sqrt{b}\right)}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=$

$=8\sqrt{a}+7\sqrt{b}.$

в) $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}=\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2+\left(\sqrt{3y}\right)^2+2\cdot\sqrt{3x}\cdot\sqrt{3y}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{3y}\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}.$

г) Преобразуем числитель дроби:

$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^2\sqrt{a}-\left(\sqrt{b}\right)^2\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=$

$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right).$

В результате получаем: $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a+b+\sqrt{ab}$. ▲

Пример 4. Докажите тождество:

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{n-\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{n}}{m-\sqrt{mn}}\right)\cdot\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}=-1.$$

Δ Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{\sqrt{m}}{n-\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{n}}{m-\sqrt{mn}}=\frac{\sqrt{m}}{\left(\sqrt{n}\right)^2-\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{m}\right)^2-\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}-\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=\frac{\left(\sqrt{m}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{-\sqrt{nm}}.$$ Тождество доказано. ▲

Пример 5. Решите уравнение.

$\sqrt{4x^2+16x+16}-\sqrt{x^2-6x+9}=4.$ Преобразуем левую часть уравнения:

$\sqrt{4x^2+16x+16}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{4\left(x^2+4x+4\right)}-\sqrt{(x-3)^2}=$

$=\sqrt{4}\cdot\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-3)^2}=2|x+2|-|x-3|.$ После тождественных преобразований получили уравнение $2|x+2|-|x-3|=4.$

1) Пусть $x\geq 3,$ тогда $|x-3|=x-3, |x+2|=x+2,$ наше уравнение сводится к уравнению

$$2(x+2)-(x-3)=4;\ 2x+4-x+3=4;\ x+3=0;\ x=-3,$$

но это число меньше 3.

2) Пусть теперь $-2<x<3,$ тогда $|x-3|=3-x, |x+2|=x+2,$ получаем уравнение: $2x+4+x-3=4, 3x=3, x=1.$ Число 1 удовлетворяет условию $-2<1<3.$

3) Пусть $x\leq -2,$ тогда $|x-3|=3-x, |x+2|=-x-2,$ приходим к уравнению: $-2x-4-3+x=4, -x=11, x=-11.$ Число $-11<-2.$

Ответ: $1; -11.$ ▲

Пример 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}3\sqrt{x+3}-2\sqrt{y-2}=3,\\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y-2}=9.\end{cases}$$

Корень $\sqrt{x+3}$ определен при $x\geq -3,$ а корень $\sqrt{y-2}$ определен при $y\geq 2.$

Умножим второе уравнение системы на 2 и прибавим к первому уравнению, получаем: $7\sqrt{x+3}=21, \sqrt{x+3}=3, x+3=9, x=6.$ Подставляем это значение для x в первое уравнение, получаем:

$$3\cdot 3-2\sqrt{y-2}=3;\ 6=2\sqrt{y-2};\ \sqrt{y-2}=3;\ y-2=9;\ y=11.$$

Ответ: $(6;11)$. ▲

§5. Преобразование двойных радикалов

Выражения вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ называют сложными или двойными радикалами. Мы уже рассматривали примеры, где можно избавиться от внешних радикалов.

Пример 1. Освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{23+4\sqrt{15}}$.

∇ Заметим, что выражение $23+4\sqrt{15}=20+3+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=$ $=\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$, тогда $\sqrt{23+4\sqrt{15}}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=\left|2\sqrt{5}+3\right|=2\sqrt{5}+\sqrt{3}.$

Пример 2. Освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{124-70\sqrt{3}}$.

В этом примере укажем метод, как можно избавляться от внешнего радикала. Подберем целые числа a и b такие, чтобы $\sqrt{124-70\sqrt{3}}=$ $=a-b\sqrt{3}$. Если такие числа есть, то должны выполняться такие условия:

$$\begin{cases}\left(a-b\sqrt{3}\right)^2=124-70\sqrt{3},\\ a-b\sqrt{3}\geq 0.\end{cases}$$

Из первого условия получаем

$$a^2-2ab\sqrt{3}+3b^2=124-70\sqrt{3},$$
$$a^2+3b^2-124=2ab\sqrt{3}-70\sqrt{3}.$$

Выражение a^2+3b^2-124 является целым числом, т. к. a и b – целые числа, значит левая часть, т. е. a^2+3b^2-124 является рациональным числом; выражение $(2ab-70)\sqrt{3}$ является рациональным выражением, если $2ab-70=0$, т. е. $ab=35$. Уравнению $ab=35$ удовлетворяют следующие пары чисел: $a=1, b=35$; $a=5, b=7$; $a=7, b=5$; $a=35, b=1$; $a=-1, b=-35$; $a=-5, b=-7$; $a=-7, b=-5$; $a=-35, b=-1$.

Условию $a^2+3b^2-124=0$ удовлетворяют две пары чисел: $a=7, b=5$ и $a=-7, b=-5$. Число $7-5\sqrt{3}$ не удовлетворяет

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

условию $a-b\sqrt{3}\geq 0$, а число $-7+5\sqrt{3}$ удовлетворяет этому условию. Таким образом, $\sqrt{124-70\sqrt{3}}=-7+5\sqrt{3}$. ▲

В некоторых примерах удается избавиться от внешнего радикала, если воспользоваться тождеством

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Это тождество называют формулой двойного радикала. Оно справедливо, если $a>0, b>0$ и $a^2-b>0$. Тогда все три корня определены и $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}>\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, поэтому правая часть равенства положительная. Возведем в квадрат обе части равенства, получаем:

$$a\pm\sqrt{b}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{4}},$$

$$a\pm b=a\pm\sqrt{b}.$$

Пример 2. Освободитесь от внешнего радикала в выражении

$$\sqrt{56-\sqrt{2880}},$$

применяя тождество двойного радикала.

$$\sqrt{56-\sqrt{2880}}=\sqrt{\frac{56+\sqrt{3136-2880}}{2}}-\sqrt{\frac{56-\sqrt{3136-2880}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{56+16}{2}}-\sqrt{\frac{56-16}{2}}=6-\sqrt{20}=6-2\sqrt{5}.\ ▲$$

§6. Построение графиков функций

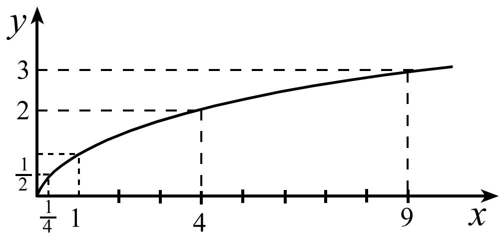
В школьном курсе 7-го класса вы уже рассматривали график линейной функции $y=kx+b$, графики функций $y=x^2$ и $y=x^3$. В этом году вы познакомились с еще одной функцией, а именно, с функцией $y=\sqrt{x}$.

Составим таблицу значений этой функции, очевидно, что она определена при $x\geq 0$.

x	0	$1/16$	$1/9$	$1/4$	1	4	9
y	0	$1/4$	$1/3$	$1/2$	1	2	3

Построим график этой функции.

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.



Пример 1. Постройте графики функций:

а) $y=\sqrt{x^2}$; б) $y=-\sqrt{-x}$; в) $y=\sqrt{x+1}$; г) $y=\sqrt{|x+1|}$;

д) $y=\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+2x+1}$; е) $y=\left(-\sqrt{x}\right)^2$.

Δ а) Из определения арифметического корня следует, что

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, \text{ åñëè } x\geq 0, \\ -x, \text{ åñëè } x<0. \end{cases}$$

График данной функции приведен на рис. 2.

б) Из определения корня следует, что $-x\geq 0$, т. е. $x\leq 0$. Составим таблицу значений функции.

x	0	$-1/16$	$-1/4$	-1	-4	-9
y	0	$-1/4$	$-1/2$	-1	-2	-3

График функции изображен на рис. 3.

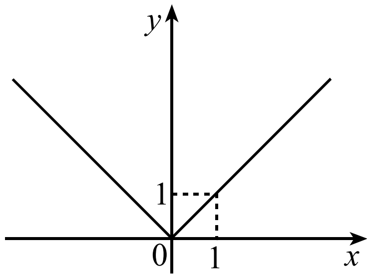


Рис. 2

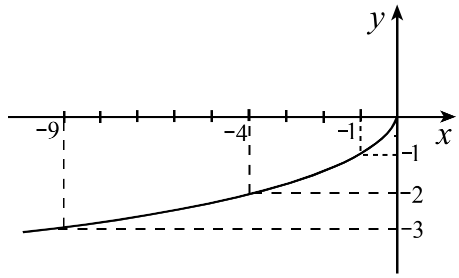


Рис. 3

в) Данная функция определена при $x+1\geq 0, x\geq -1$. При $x=-1$, $y=0$, при $x=3, y=2$, при $x=8, y=3$. График данной функции получается из графика функции $y=\sqrt{x}$ параллельным сдвигом вдоль оси Ox на одну единицу влево. Приводим график данной функции на рис. 4.

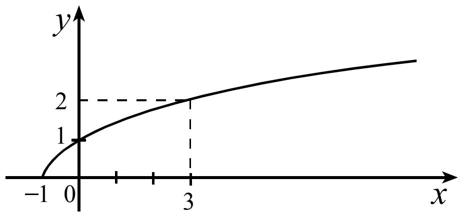


Рис. 4

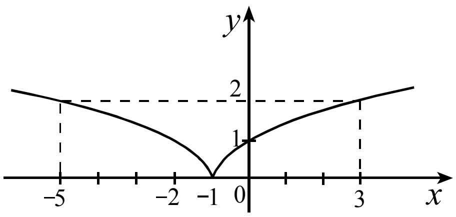


Рис. 5

г) Данная функция определена при всех x. При $x \geq -1$ выражение $|x+1| = x+1$, поэтому график данной функции совпадает с графиком функции $y = \sqrt{x+1}$, который мы привели на рис. 4. При $x \leq -1$ данная функция определена, при этом $y = \sqrt{-x-1}$. Заметим, что данная функция в точках, симметричных относительно точки (-1), принимает равные значения. Например, при $x = 0$ и $x = -2$ значения функции совпадают и равны 1. В точках 3 и (-5) значения функции также совпадают и равны 2. Про график данной функции говорят так: график функции симметричен относительно прямой $x = -1$. График данной функции приведен на рис. 5.

д) Преобразуем выражение, которым задается наша функция.

$$y = \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(x+1)^2} = |x-2| - |x+1|.$$

При $x \geq 2$ $y = x - 2 - x - 1 = -3$.

При $-1 < x < 2$ $y = -x + 2 - x - 1 = -2x + 1$.

При $x \leq -1$ $y = -x + 2 + x + 1 = 3$.

График функции изображен на рис. 6.

е) Данная функция определена при $x \geq 0$. Для этих значений $y = \left(-\sqrt{x}\right)^2 = x$. График функции приведена на рис. 7.▲

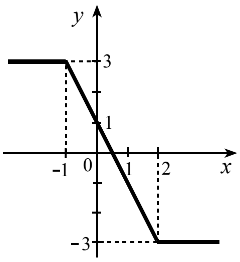


Рис. 6

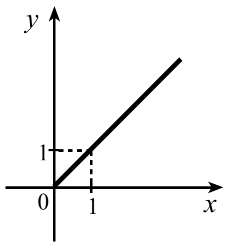


Рис. 7

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

Пример 2. Постройте график функции

$$y=\begin{cases}3-\sqrt{-x}, \text{ если } x\le 0;\\ 3-\dfrac{5}{2}x, \text{ если } 0<x<2;\\ \sqrt{x-2}-2, \text{ если } x\ge 2.\end{cases}$$

Δ На рис. 3 в предыдущем примере мы строили график функции $y=-\sqrt{-x}$. Значения данной функции при $x\le 0$ получаются из значений функции $y=-\sqrt{x}$ прибавлением числа 3, т. е. график функции $y=3-\sqrt{-x}$ получается из графика функции $y=-\sqrt{-x}$ сдвигом параллельно оси Oy на 3 единицы вверх.

Рассмотрим функцию $y=3-\dfrac{5}{2}x$. Ее графиком является прямая, проходящая через точки $(0;3)$ и $(2;-2)$. График данной функции при $0<x<2$ совпадает с графиком прямой $y=3-\dfrac{5}{2}x$. При $x\ge 2$ можно сначала построить график функции $y=\sqrt{x-2}$, а затем сдвинуть на 2 единицы вниз параллельно оси Oy. Составим таблицу значений функции

x	-9	-1	0	2	6
y	0	1	3	-2	0

График функции приведен на рис. 8.▲

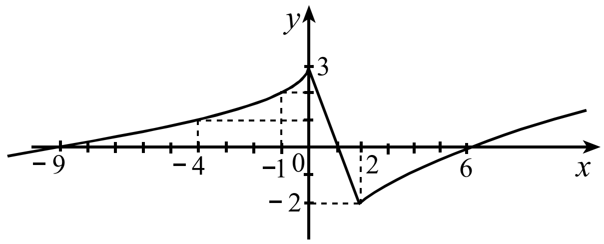


Рис. 8

Контрольные вопросы

1(2). Докажите, что число $\sqrt{11}$ является иррациональным числом.

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

2(1). Укажите, какие из нижеперечисленных чисел являются рациональными, а какие иррациональными: $\sqrt{3}$; $\frac{2}{9}$; $0{,}3(51)$; $\sqrt{79}$; $2{,}2753$; $\frac{21}{76}$.

3(2). При каких x имеет смысл выражение:

а) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$; б) $\frac{3x+1}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-5}}$; в) $\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x-7}-1}$;

г) $\frac{5x-9}{(x-1)\sqrt{x^2-9}}$; д) $\frac{\sqrt{2x+3}}{(x^2+1)\sqrt{1-3x}}$?

4(2). Решите уравнения:

а) $2\sqrt{x}-3=0$; б) $5\sqrt{x-1}+7=0$;

в) $\sqrt{3x-5}=1$; г) $\sqrt{4x-3}=\sqrt{24-5x}$.

5(1). Сравните числа $a=\frac{1}{2}\sqrt{235}$ и $b=\sqrt{\frac{293}{5}}$.

6(1). Между какими последовательными натуральными числами расположено число $\frac{1}{12}\sqrt{5372}$?

7(1). Докажите, что $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{11}\right)^2=111-12\sqrt{33}$. Следует ли из этого, что $\sqrt{111-12\sqrt{33}}=2\sqrt{3}-3\sqrt{11}$?

8(4). Упростите выражения:

а) $\left(5a+2\sqrt{15ab}+6b\right)\cdot\left(5a-2\sqrt{15ab}+6b\right)$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$;

в) $\sqrt{\frac{7\sqrt{7}+5\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\sqrt{35}}$;

г) $\left(\frac{16}{\sqrt{5}-1}-\frac{5}{\sqrt{3}+2}-\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}+6\right)$.

9(3). Сократите дроби:

а) $\frac{x+169}{\sqrt{-x}+13}$; б) $\frac{46\sqrt{x}-x\sqrt{46}}{\sqrt{x}-\sqrt{46}}$; в) $\frac{x\sqrt{x}-27}{\sqrt{x}-3}$.

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

10(1). Докажите, что число $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ является натуральным числом, если $a = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

11(1). Является ли число $2 - \sqrt{3}$ корнем уравнения $x^4 - 3x^3 - 11x + 3 = 0$?

12(2). Постройте графики функций:

а) $y = 3 - \sqrt{(x-2)^2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$.

Задачи

1(2). Расположите числа в порядке возрастания:

а) $2\sqrt{3}$; $\dfrac{\sqrt{73}}{\sqrt{7}}$; $\dfrac{1}{2}\sqrt{45,4}$.

б) $6\sqrt{2}$; $\sqrt{70} - 4\sqrt{5}$; $\sqrt{78}$; $\sqrt{10} + \sqrt{29}$.

2(2). Докажите, что число $\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ является иррациональным числом.

3(2). а) Приведите пример двух иррациональных чисел, сумма которых – число рациональное.

б) Приведите пример двух иррациональных чисел, произведение которых – число рациональное.

4(3). Сравните числа:

а) $\sqrt{19} + \sqrt{15}$ и $\sqrt{13} + \sqrt{21}$;

б) $\sqrt{5680^2 - 5642^2}$ и $\sqrt{5642^2 - 5604^2}$;

в) $0,815 \cdot 0,015 \cdot 0,005$ и $\sqrt{0,0815 \cdot 0,0015 \cdot 0,5}$.

5(1). При каких x определено выражение $\sqrt{x+5} + \dfrac{2x-3}{(2x+1)\sqrt{7-x}}$?

6(2). Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{48a^3b^{14}}$, при $b \le 0$;

б) $\sqrt{-a^7 \cdot b^{11}}$, при $a > 0, b < 0$;

в) $-\sqrt{\left(\sqrt{21} - 3\sqrt{5}\right)^3 \cdot \left(2 - \sqrt{19}\right)^5}$;

г) $\sqrt{\dfrac{-1}{(b-a)^5}}$.

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.

7(2). Внесите множитель под знак корня:

а) $(2-x)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$; б) $-(3+x)\sqrt{-(3+x)}$;

в) $(5-a)\sqrt{a}$ при $a>5$; г) $-xy\sqrt{-xy}$.

8(2). Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби

а) $\dfrac{2}{3\sqrt{7}-\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$.

9(3). Решите уравнения:

а) $\sqrt{5x-1}=3$; б) $\sqrt{7x+3}=-5$; в) $\dfrac{3\sqrt{x+3}-4}{3+\sqrt{x+3}}=\dfrac{5}{6}$.

г) $\left|\sqrt{5x+1}-1\right|=3$; д) $\dfrac{\sqrt{4x^2-9}}{\sqrt{3-2x}}=5$;

е) $\sqrt{9x^2-30x+25}=\sqrt{25x^2-80x+81}$.

10(3). Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{xy}}\cdot\sqrt{-y^3}$; б) $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}$, если $x\geq 0$;

в) $\left(\dfrac{2+\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a\sqrt{a}+a-\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$.

11(2). Упростите, используя формулу двойного радикала:

а) $\sqrt{18-\sqrt{128}}$; б) $\sqrt{8+\sqrt{60}}$.

12(6). Постройте графики функций:

а) $y=\sqrt{|x|}$; б) $y=\sqrt{x-2}+1$; в) $y=1-\sqrt{x-1}$;

г) $y=\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x+1)^2}$; д) $y=\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{(x-2)x}$;

е) $y=\begin{cases}1-\sqrt{-x-1},\ \textit{если}\ x\leq -1;\\ x^2,\ \textit{если}\ x\in(-1;2);\\ \dfrac{8}{x},\ \textit{если}\ x>2.\end{cases}$

© 2005, ФЗФТШ при МФТИ. Составитель Яковлева Тамара Харитоновна.