Контрольные вопросы

В вопросах 1 – 8 рассматриваются точки $A(3;-2;-1)$, $B(5;-4;0)$ и плоскость α, заданная уравнением $x-4y-z-48=0$.

1(2). Найти угол между прямой AB и плоскостью α.
2(1). Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости α и проходящей через точку B.

3(3). Составить уравнение плоскости β, проходящей через точки A, B и начало координат. Найти угол между плоскостями α и β.

4(2). Составить уравнение плоскости γ, проходящей через точки A и B перпендикулярно плоскости α.

5(2). Найти расстояние от точки A до плоскости α.

6(2). Найти координаты ортогональной проекции точки A на плоскость α.

7(2). Составить уравнение плоскости, каждая точка M которой такова, что $MA = MB$.

8(2). Составить уравнение сферы с центром в середине отрезка AB и проходящей через начало координат.

9(3). Противоположные ребра тетраэдра попарно равны. Доказать, что все грани-равные между собой остроугольные треугольники.

10(3). Плоскость BDK – биссектор двугранного угла при ребре BD (рис. 26). Доказать, что $\dfrac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \dfrac{S_{ABK}}{S_{CBK}}$.

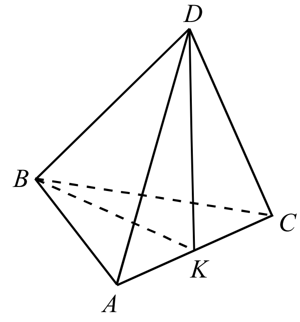

Рис. 26

11(3). $ABCD$ – правильный тетраэдр с ребром a, точки M и N – середины противолежащих ребер AC и BD. Доказать, что $AC \perp BD$, что отрезок MN – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AC и BD и $MN = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

12(3). $ABCD$ – правильный тетраэдр. Доказать, что центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы, а их радиусы r и R соответственно равны $r = \dfrac{1}{4}H$, $R = \dfrac{3}{4}H$, где H – высота правильного тетраэдра.

Задачи

(задачи 1–3 из ЕГЭ, а 4–12 – из вариантов вступительных экзаменов разных лет). Можно ограничиться решением только 10 задач по своему выбору.

При координатном методе решения или разложении по трем векторам просьба следовать указаниям к условию задачи: это облегчит проверку Ваших работ, а Вам будет проще сравнить свои и присланные Вам решения.

1(4). Задача В – 10 ЕГЭ.

Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$, высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D_1 и середины ребер AD и CD. Найти косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

2(4). Задача В – 9 ЕГЭ.

В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC, в котором $\angle B = 30^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$. Все боковые ребра равны между собой и равны $\sqrt{51}$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

3(6). Задача С – 4 ЕГЭ.

В основании пирамиды $FABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$; ребро AF перпендикулярно плоскости основания и равно 4. Отрезки AM и AL являются высотами треугольников AFB и AFC. Найти объем пирамиды $AMLC$.

4(8). В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = \sqrt{2}$ и $AD = 1$. Ребро BC и диагональ AB_1 грани AA_1B_1B образуют равные углы с плоскостью AD_1C. Найти:

а) длину ребра AA_1;

б) расстояние от точки B до плоскости AD_1C;

в) угол между плоскостями AD_1C и AB_1C.

При координатном методе решения начало координат поместить в точку A, ось Ox направить по прямой AB.

5(7). Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. На ребре AA_1 взята точка F, $AF=\frac{5}{12}$; на ребре BC взята точка E, $CE=\frac{3}{4}$. Через точки F, E и центр грани CC_1D_1D проведена плоскость α. Найти

а) в каком отношении плоскость α делит ребра DD_1 и AB;

б) радиус сферы, касающейся трех граней куба при вершине D и плоскости α.

При координатном методе решения начало координат поместить в точку D, ось Ox направить по прямой DA.

6(6). Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна m. Два противоположных ребра правильного тетраэдра расположены на прямых A_1B и B_1C. Найти

а) высоту призмы;

б) длину ребра правильного тетраэдра.

Можно использовать разложение по векторам $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$, а затем переход через объем.

7(6). В тетраэдре $SABC$ ребро SB равно $\sqrt{3}$, точка E лежит на ребре AC и делит его в отношении $3:1$. Сечение SBE имеет площадь 3 и образует с гранями SAB и SBC соответственно углы 60° и 30°. Найти объем пирамиды $SABC$.

Повторите §4: различные формулы объема тетраэдра.

8(7). В условиях задач 7–8 §2 Задания найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

9(7). В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра BC и AD взаимно перпендикулярны, $AB=CD$, расстояние от середины O ребра BC до плоскости ABD равно h, $\angle CAD=\angle CDA=\frac{\pi}{6}$, угол между ребрами AD и гранью ABC равен $\arccos\frac{2}{5}$. Найти:

а) расстояние от точки O до плоскости ACD;

б) угол между ребром BC и гранью ABD.

10(9). Прямой круговой конус с вершиной O имеет высоту 2 и образующую длины $\sqrt{13}$. Пирамида $ABCD$ вписана в конус так, что точки A и C принадлежат окружности основания, точки B и D принадлежат боковой поверхности, причем точка B принадлежит образующей OA. Точки B и D равноудалены от плоскости основания конуса, $OB=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $AC=4\sqrt{2}$, $BD=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Найти:

а) объем пирамиды $ABCD$;

б) двугранный угол при ребре AB тетраэдра $ABCD$;

в) радиус сферы, описанной около пирамиды $ABCD$.

11(9). Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно 20, $\angle DAB=\arcsin\frac{\sqrt{13}}{5}$. Точки A_1, B_1, C_1 – середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти: а) угол между прямыми BA_1 и AC_1; б) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1; в) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

12(9). Найти объем тетраэдра $ABCD$ с ребрами $AB=5$, $AC=1$, $CD=7$, если расстояние между серединами M и N его ребер AC и BD равно 3, а прямая AC образует равные углы с прямыми AB, CD и MN.