## §4. Объем тетраэдра

В §1 (задача 6) и в §3 (задача 14) уже обсуждались две формулы объема тетраэдра.

**1.** $V = \frac{1}{3} S_{\text{îñí}} \cdot H$, где $H$ – высота к основанию, и

**2.** $V = \frac{1}{3} S_{\text{ï}} \cdot r$, где $r$ – радиус вписанной сферы, а $S_{\text{ï}}$ – площадь полной поверхности тетраэдра.

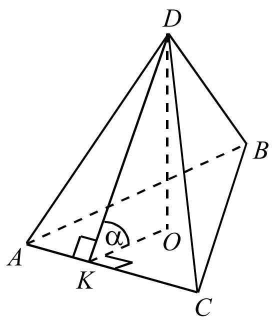
Первая из них, основная формула объема, часто используется для определения расстояния между скрещивающимися прямыми (как в задаче 6 §1), расстояния между плоскостью и параллельной ей прямой или расстояния между двумя плоскостями.

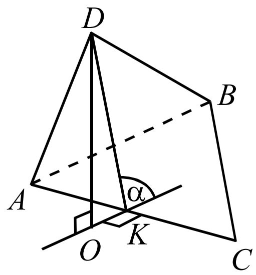
Дадим краткий вывод еще двух формул объема тетраэдра:

**3.** $V = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \frac{\sin\alpha}{a}$, где $S_1$ и $S_2$ – площади двух граней, $a$ – длина их общего ребра, $\alpha$ – величина двугранного угла между этими гранями.

**4.** $V = \frac{1}{6} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi \cdot d,$ где $a$ и $b$ – длины противоположных ребер тетраэдра, $\varphi$ – угол между скрещивающимися прямыми, на которых лежат эти ребра, $d$ – расстояние между этими прямыми.

□ Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, в котором $AC = a$, площади граней $ABC$ и $ADC$ равны $S_1$ и $S_2$ соответственно. Пусть вершина $D$ проектируется в точку $O$ плоскости основания $ABC$ и $DK \perp AC$ (рис. 24). По теореме о трех перпендикулярах $OK \perp AC$.




**а)** **Рис. 24** **б)**

Угол $DKO$ либо равен величине $\alpha$ двугранного угла между гранями $ADC$ и $ABC$ (рис. а), либо $\angle DKO = 180^\circ - \alpha$ (рис. б). Если же точка $O$ лежит на прямой $AC$, то плоскости $ADC$ и $ABC$ перпендикулярны друг другу, $\alpha = 90^\circ$. Во всех случаях $DO = DK \cdot \sin\alpha$.

Так как $S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot DK,$ то

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} S_1 \cdot DK \cdot \sin\alpha = \frac{1}{3} S_1 \frac{\frac{1}{2} AC \cdot DK}{\frac{1}{2} AC} \sin\alpha,$$

откуда $V = \frac{2}{3} S_1 \cdot S_2 \frac{\sin\alpha}{a}$. ■

Для доказательства формулы 4 достроим тетраэдр до параллелепипеда, проводя через каждое его ребро плоскость,

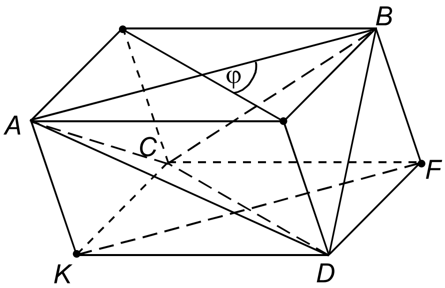



**Рис. 25**

параллельную противолежащему ребру. Три пары параллельных плоскостей образуют параллелепипед, в котором ребра исходного тетраэдра являются диагоналями граней (рис. 25).

□ За основание параллелепипеда примем грань с диагональю $CD$, его площадь обозначим $S$, тогда объем параллелепипеда $v = S \cdot d$, где $d$ – расстояние между плоскостью основания и плоскостью параллельной ей грани.

Объем параллелепипеда равен сумме объема тетраэдра $V$ и объема $4^x$ пирамид, в каждой из которых основание составляет половину площади $S$ параллелограмма $KCFD$ и высота совпадает с высотой параллелепипеда.

Итак, $v = V + 4 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot d\right) = V + \frac{2}{3} v$, откуда $V = \frac{1}{3} v$.

Так как $v = S \cdot d = \left(\frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin\varphi\right) d$, то

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot \sin\varphi \cdot d = \frac{1}{6} ab \sin\varphi \cdot d,$$

где $AB = a, CD = b$.

Формула 4 особенно удобна в случае, когда противоположные ребра тетраэдра (например, $AB$ и $CD$) перпендикулярны друг другу.