

§4. Уравнения, системы уравнений и неравенства, содержащие параметр

В задачах с параметром необходимо определить, при каких значениях параметра задача имеет решения и для всех таких значений найти все решения.

Пример 24. Решить уравнение $\sin x = \sqrt{a \cos x + 1}$.

Решение. Равенство $A = \sqrt{B}$ равносильно системе $\begin{cases} A \geq 0, \\ A^2 = B. \end{cases}$

Имеем: $\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin^2 x = a \cos x + 1. \end{cases}$

Отсюда

$$0 = a \cos x + \cos^2 x.$$

а) $\cos x = 0$. Неравенству $\sin x \geq 0$ удовлетворяют корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

б) $\cos x + a = 0$, т. е. $\cos x = -a \neq 0$ при $a \neq 0$, тогда $\sin x = \sqrt{1 - a^2}$ ($\sin x \geq 0$), где $|a| \leq 1$. Отметим, что если $\alpha = \arccos p$, то $\sin \alpha \geq 0$, так как из определения функции $f(t) = \arccos t$, $f(t) \in [0, \pi]$. Отсюда следует ответ.

Ответ. При $0 < |a| \leq 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = \arccos(-a) + 2\pi n$;

при $|a| > 1$ и $a = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Пример 25. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $(1-a)\operatorname{tg}^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$ имеет более одного решения на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Положим $t = \frac{1}{\cos x}$, тогда из тождества $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ следует $(1-a)(t^2 - 1) - 2t + 1 + 3a = 0$, т. е. $(1-a)t^2 - 2t + 4a = 0$.

При $a = 1$ получаем линейное уравнение $-2t + 4 = 0$, $t = 2$, $\cos x = \frac{1}{2}$. Это уравнение на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет одно решение, значит, $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи. При $a \neq 1$ получаем квадратное уравнение, его корни $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{2a}{1-a}$, т. е. $\cos x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{1-a}{2a}$.

На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $f(x) = \cos x$ каждое значение из интервала $(0;1)$ принимает ровно один раз, поэтому условие задачи равносильно следующему: найти все a , для которых $\frac{1-a}{2a} \in (0;1)$ и $\frac{1-a}{2a} \neq \frac{1}{2}$. Отсюда $a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ и $a \neq \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Пример 26. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + 2 \sin y = 0, \\ \cos x + 2 \cos y = a. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения системы и рассмотрим сумму их квадратов

$$\begin{cases} \sin x = -2 \sin y, \\ \cos x = a - 2 \cos y, \end{cases} \Rightarrow 1 = a^2 - 4a \cos y + 4.$$

При $a = 0$ полученное равенство невозможно. При $a \neq 0$
 $\cos y = \frac{a^2 + 3}{4a}$. Таким образом, $\left| \frac{a^2 + 3}{4a} \right| \leq 1$, $\frac{|a|^2 + 3}{4|a|} \leq 1$,
 $|a|^2 - 4|a| + 3 \leq 0$, $1 \leq |a| \leq 3$. Теперь из второго уравнения системы
 $\cos x = a - 2 \frac{a^2 + 3}{4a} = \frac{a^2 - 3}{2a}$. Значит, необходимо $\left| \frac{a^2 - 3}{2a} \right| \leq 1$. Если
 $|a| \geq \sqrt{3}$, то $|a|^2 - 3 \leq 2|a|$, $-1 \leq |a| \leq 3$, и мы получаем $\sqrt{3} \leq |a| \leq 3$.
 Если $|a| < \sqrt{3}$, то $3 - |a|^2 \leq 2|a|$, $|a| \geq 1$, т. е. $1 \leq |a| < \sqrt{3}$. Таким
 образом, для всех a , таких, что $1 \leq |a| \leq 3$, выполняются неравенства
 $|\cos y| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$ т. е. существуют решения системы. Из первого
 уравнения системы получаем, что $\sin x$ и $\sin y$ должны иметь
 противоположные знаки.

Ответ. При $|a| < 1$ и $|a| > 3$ система решений не имеет;

$$\text{при } 1 \leq |a| \leq 3 \quad y = \pm \arccos \frac{a^2 + 3}{4a} + 2\pi n,$$

$$x = \mp \arccos \frac{a^2 - 3}{2a} + 2\pi m.$$

Пример 27. Найти все значения параметра a , при которых нера-
 венство $\left| 3 \sin^2 x + a \sin 2x + \cos^2 x + a \right| \leq 3$ верно при всех $x \in R$.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\left| 3 \frac{1 - \cos 2x}{2} + a \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} + a \right| \leq 3,$$

$$|a \sin 2x - \cos 2x + a + 2| \leq 3,$$

т. е. $-3 \leq a \sin 2x - \cos 2x + a + 2 \leq 3$,
 $-5 - a < a \sin 2x - \cos 2x \leq 1 - a$.

Так как $a \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{a^2 + 1} \sin(2x - \varphi)$, то наибольшее
 значение функции $f(x) = a \sin 2x - \cos 2x$ равно $\sqrt{a^2 + 1}$, наимень-

шее равно $-\sqrt{a^2+1}$, поэтому неравенства $-5-a \leq f(x) \leq 1-a$ справедливы при всех значениях x тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -a-5 \leq -\sqrt{a^2+1}, \\ \sqrt{a^2+1} \leq 1-a. \end{cases}$$

Из первого неравенства находим $a \geq -\frac{12}{5}$, из второго $a \leq 0$.

Ответ: $\left[-\frac{12}{5}; 0\right]$.