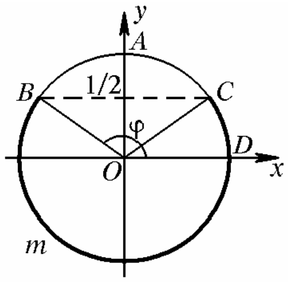
§3. Тригонометрические неравенства

Решения простейших тригонометрических неравенств $\sin x > a(< a)$, $\cos x > a(< a)$, $\text{tg}x > a(< a)$, к которым сводятся более сложные неравенства, наиболее просто находятся с помощью тригонометрического круга и оси тангенсов.

Пример 17. Решить неравенство $3\sin x + \cos 2x \le 2$.

Решение. Положив $t = \sin x$, получаем $3t + 1 - 2t^2 \le 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 \ge 0$, откуда $t \ge 1$ и $t \le \dfrac{1}{2}$.

Первому неравенству удовлетворяет только одна точка $A\left(x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m\right)$ на тригонометрическом круге, второму – дуга BmC. Учитывая то, что $\angle DOB=\dfrac{5\pi}{6}$, получаем, что BmC – это промежуток $\left[\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;2\pi+\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right]$.



Ответ: объединение всех отрезков $\left[\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\dfrac{13\pi}{6}+2\pi n\right]$ и точек $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

Замечание. Ошибочным было бы включение в ответ промежутка $\left[\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right]$ (такой отрезок не существует) либо отрезка $\left[\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\dfrac{13\pi}{6}+2\pi m\right]$. Такой отрезок не существует при $m<n$, а при $m>n$ получаем точки на всем тригонометрическом круге.

Пример 18. Решить неравенство $\sin x+2\cos x\ge 0.$

Решение. Введя дополнительный угол, получаем

$\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)\ge 0,$ т. е. $\cos(x-\varphi)\ge 0,$ $\varphi=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}.$

Отсюда $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\le x-\varphi\le\dfrac{\pi}{2}+2\pi n.$

Ответ: $\left[\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n; \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right].$

Пример 19. Решить неравенство

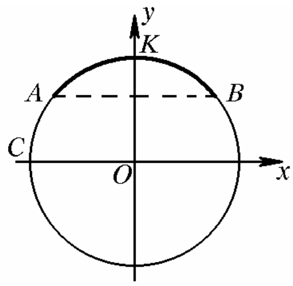
$$\sin 2x+\sin x \geq 1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Решение. Преобразуем неравенство

$$\sin 2x+\sin x \geq 1+\cos x-\sin x,$$

$$2\sin x\cos x+2\sin x \geq 1+\cos x,$$
$$2\sin x(1+\cos x)-(1+\cos x)\geq 0,$$
$$(1+\cos x)(2\sin x-1)\geq 0.$$

Если $1+\cos x=0,$ $x=\pi+2\pi n,$ то неравенство верно. (Ошибочным является такое рассуждение: в силу того, что $1+\cos x\geq 0,$ наше неравенство равносильно следующему: $2\sin x-1\geq 0,$ т. к. если $1+\cos x=0,$ то при любом знаке выражения $2\sin x-1$ произведение равно нулю, т. е. неотрицательно.)



Если $1+\cos x>0,$ то получаем простейшее неравенство $\sin x\geq\dfrac{1}{2},$ решениям которого соответствует дуга AKB тригонометрического круга.

Ответ: объединение всех отрезков $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$ и точек $\pi+2\pi n.$

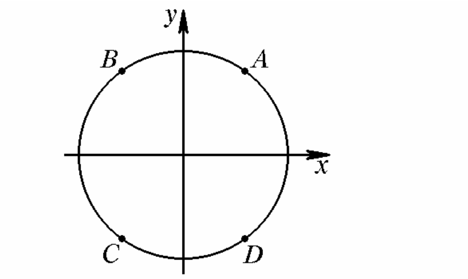
Следующие два примера показывают, что при отборе корней уравнений, удовлетворяющих некоторому неравенству, не всегда необходимо решать это неравенство. Значительно проще проверить, удовлетворяют ли найденные решения неравенству.

Пример 20. Найти все решения уравнения

$$4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2\mathrm{ctg}^2 x,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 2\cos x$.

Решение. Понизим порядок



$$(1-\cos 2x)^2 + \sin^2 2x = 2\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x},\ 1-\cos 2x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}.$$

Положив $t = \cos 2x$, получаем $1 - t = \dfrac{1+t}{1-t}$, $t^2 - 3t = 0$, откуда $\cos 2x = 0$, так как $|\cos 2x| \leq 1$. Итак, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$. Отметив найденные корни на тригонометрическом круге, сразу устанавливаем, что корни, соответствующие точке *B,* удовлетворяют неравенству $\sin x \geq 2\cos x$, так как во II четверти $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, точке *D* – посторонние: $\sin x < 0$, $\cos x > 0$, точке *A* – посторонние, т. к. $\sin x = \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Корни, соответствующие точке *C*, – искомые, т. к. $\sin x = \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\pi \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m.$

Пример 21. Решить уравнение $\sqrt{6\sin x \cos 2x} = \sqrt{-7\sin 2x}$.

Решение. Равенство $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ равносильно системе

$$\begin{cases} A = B, \\ A \ge 0, \\ B \ge 0. \end{cases}$$

т. е. системе

$$\begin{cases} A = B, \\ B \ge 0. \end{cases}$$

Следовательно, найдя корни уравнения, мы не должны проверять выполнение неравенства $\sin x \cos 2x \ge 0$, достаточно только выбрать корни, удовлетворяющие неравенству $\sin 2x \le 0$. Имеем: $6\sin x\cos 2x = -7\sin 2x$, $2\sin x(3\cos 2x + 7\cos x) = 0$. Отсюда:
а) $\sin x = 0$, $x = \pi n$ – все корни походят; б) $3\cos 2x + 7\cos x = 0$.

Положив $t = \cos x$, получаем $3\left(2t^2 - 1\right) + 7t = 0$, $t = -\dfrac{3}{2}$ – постороннее значение, $t = \dfrac{1}{3}$. Итак, $\cos x = \dfrac{1}{3}$, тогда неравенство $\sin 2x \le 0$ равносильно неравенству $\sin x \le 0$. Отсюда $x = -\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi m$.

Ответ: $x = \pi n$, $x = -\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi m$.

Тригонометрические неравенства возникают при решении уравнений, содержащих модули.

Пример 22. Решить уравнение $\left|\sin x - \dfrac{1}{2}\right| = \cos x - \dfrac{1}{2}$.

Решение. (См. также II способ решения примера 9.) Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому решения находятся из системы

$$\begin{cases} \pm\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right) = \cos x - \dfrac{1}{2}, \\ \cos x - \dfrac{1}{2} \ge 0. \end{cases}$$

Для знака «+» получаем: $\sin x = \cos x,\ tgx = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = +\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2},\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$

Для знака «–»: $\sin x + \cos x = 1,\ \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1,\quad x + \frac{\pi}{4} =$
$= \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow x = 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

Для второй серии решений $\cos x - \frac{1}{2} < 0.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ 2\pi n.$

Пример 23. Решить уравнение $2 + \sqrt{3}\sin x + |\cos x| = 4\cos^2 x.$

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $\cos x \geq 0.$ (*)

Тогда $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\cos 2x,\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x.$ При решении этого уравнения можно разложить разность косинусов на множители. Но проще, используя четность и 2π – периодичность косинуса, сразу написать $2x = \pm\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$ откуда $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}.$ Отметив найденные корни на тригонометрическом круге, получаем, что неравенству (*) удовлетворяют $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ x = \frac{\pi}{9} + 2\pi n.$

2) $\cos x < 0.$ (**)

Тогда $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\cos 2x,\ \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x,\quad 2x =$
$= \pm\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 2\pi n,$ откуда $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}.$

Неравенству (**) удовлетворяют $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \ x = \frac{8\pi}{9} + 2\pi n.$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{9}+2\pi n,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{8\pi}{9}+2\pi n.$