§2. Системы тригонометрических уравнений

Как и алгебраические, системы тригонометрических уравнений решаются либо методом подстановки (как правило, в тех случаях, когда уравнения системы различаются по своему виду), либо комбинированием уравнений системы для получения более простого соотношения между переменными. Проиллюстрируем оба метода решения примерами. Кроме того, приведем примеры тригонометрических уравнений, сводящихся к системам.

I тип.

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3\sin x}\cos y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что если $\sin x = 0$, то из второго уравнения $\cos x = 0$, что невозможно. Значит, $\sin x \neq 0$. Выразив из второго уравнения $\cos y$, подставим в первое:

$$\cos y = \frac{\cos x}{\sqrt{3\sin x}},\ 17\cos 2x - 7 = 21\sin x\left(2\frac{\cos^2 x}{3\sin x} - 1\right),$$

т. е. $17\cos 2x - 7 = 14\cos^2 x - 21\sin x$.

Сделаем подстановку $t = \sin x$: $17\left(1 - 2t^2\right) - 7 = 14\left(1 - t^2\right) - 21t$, откуда

$$t = \frac{1}{4},\ t = \frac{4}{5}.$$

Итак, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{4}, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{4}{5}, \\ \cos x = 2\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cos y. \end{cases}$$

Для первой системы $\cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \cos y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, что невозможно. Для второй $\cos x = \pm\frac{3}{5}$, $\cos y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, т. е.

$$x = \pm\arccos\frac{3}{5} + \pi n,\ y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi m.$$

Отметим, что

1) правильный выбор целочисленных параметров, нумерующих решения простейших тригонометрических уравнений в системах, требует внимательности и аккуратности. Так запись

$x = \pm\arccos\frac{3}{5} + \pi n,\quad y = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n$ немедленно ведет к потере бесконечного числа решений, например, решений $x = \arccos\frac{3}{5}$, $y = \arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n,\ n \neq 0.$

2) равенство $\cos x = \pm\frac{3}{5}$ дает $\sin x = \pm\frac{4}{5}$, поэтому при нахождении корней необходимо учитывать первое уравнение системы: $\sin x = \frac{4}{5}$. Значит, $x = (-1)^k \arcsin\frac{4}{5} + \pi k.$

3) полученные формулы, задающие значения y, нельзя сразу включать в ответ, т. к. согласно второму уравнению системы знаки $\cos x$ и $\cos y$ должны совпадать. Значит, при $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$, а при $x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k$ $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k,\ x = \pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m;$

$x = \pi - \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k,\ x = \pi + \arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\pi m.$

В некоторых случаях одно из уравнений системы дает не одно, а несколько различных соотношений для подстановки в другое уравнение системы.

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \cos 2y = \left(\sin y - \frac{1}{2}\right)(1 + 2\sin 2x), \\ \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 6\,\mathrm{tg}^2 y. \end{cases}$$

Решение. Из равенства $\frac{1}{2}-\cos 2y=\frac{1}{2}-\left(1-2\sin^2 y\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(4\sin^2 y-1\right)=\frac{1}{2}\left(2\sin y-1\right)\left(2\sin y+1\right)$ следует, что первое уравнение системы допускает разложение на множители: $\left(2\sin y-1\right)\left(\sin y-\sin 2x\right)=0.$ Поэтому система распадается на две:

$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} 2\sin y-1=0, \\ tgx^2+ctg^2x=6tg^2y \end{cases}$ и $(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \sin y-\sin 2x=0, \\ tg^2x+ctg^2x=6tg^2y. \end{cases}$

Для (I) имеем: $\sin y=\frac{1}{2}\Rightarrow tg^2y=\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}=\frac{1}{3}\Rightarrow tg^2x+ctg^2x=2.$

Положив $t=tg^2x,$ получаем $t+\frac{1}{t}=2,\ t=1,\ tgx=\pm 1.$

Для (II) имеем: $\sin y=\sin 2x\Rightarrow \mathrm{tg}^2y=\frac{\sin^2 2x}{1-\sin^2 2x}.$

Кроме того, $\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x=$

$$=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\frac{1}{4}4\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}.$$

Обозначив $t=\sin^2 2x,$ получаем $\frac{1-\frac{1}{2}t}{\frac{1}{4}t}=\frac{6t}{1-t},\quad t=-2,\quad t=\frac{1}{2},$ т. е.

$\sin^2 2x=\frac{1}{2},\quad \sin 2x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}.$ Тогда $\sin y=\sin 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right).$ Для удобства разобьем множество значений величины $2x$ на два: $2x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi m,$ тогда

$\sin y = \sin 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $2x = -\dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,$

тогда $\sin y = \sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ \ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8} + \pi m,\ \ y = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8} + \pi m,\ \ y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

II тип.

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6\sin x\cos y + 2\cos x\sin y = -3, \\ 5\sin x\cos y - 3\cos x\sin y = 1. \end{cases}$$

Решение. Полагая $\sin x\cos y = a, \cos x\sin y = b,$ получаем

$$\begin{cases} 6a + 2b = -3, \\ 5a - 3b = 1, \end{cases}$$

откуда $a = -\dfrac{1}{4}, b = -\dfrac{3}{4}.$ Таким образом, исходная система равносильна следующей, в которую переменные входят симметрично:

$$\begin{cases} \sin x\cos y = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos x\sin y = -\dfrac{3}{4}, \end{cases}$$

Складывая уравнения и вычитая их, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = -1, \\ \sin(x - y) = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x + y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x - y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases}$$

из которой и получается ответ.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \pi n + \frac{\pi k}{2},$

$y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \pi n - \frac{\pi k}{2}.$

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x \sin y + 2\mathrm{ctg}x \cos y = \sqrt{\frac{5}{2}}, & (*1) \\ 2\mathrm{ctg}x \sin y - \mathrm{tg}x \cos y = \sqrt{\frac{5}{2}}. & (*2) \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим данную систему как линейную относительно $\sin y$ и $\cos y$ и найдем эти выражения. Для этого вычислим сумму $(*1) \cdot \mathrm{tg}x + (*2) \cdot 2\mathrm{ctg}x$ и разность $(*1) \cdot 2\mathrm{ctg}x - (*2) \cdot \mathrm{tg}x$. Получим

$$\begin{cases} \left(\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{ctg}^2 x\right)\sin y = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\mathrm{tg}x + 2\mathrm{ctg}x\right), \\ \left(4\mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{tg}^2 x\right)\cos y = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(2\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x\right). \end{cases} \quad (**)$$

Рассмотрим сумму квадратов полученных уравнений. Из основного тригонометрического тождества следует, что одна из переменных исключается:

$$\left(\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{ctg}^2 x\right)^2 = \frac{5}{2}\left[\left(\mathrm{tg}x + 2\mathrm{ctg}x\right)^2 + \left(2\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x\right)^2\right],$$

т. е.

$$\left(\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{ctg}^2 x\right)^2 = 5\left(\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{ctg}^2 x\right).$$

Отсюда

$$\mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{ctg}^2 x = 5, \text{ так как } \mathrm{tg}^2 x + 4\mathrm{ctg}^2 x > 0.$$

Обозначив $t = \mathrm{tg}^2 x,$ получаем $t + \frac{4}{t} = 5,\ t = 1,\ t = 4.$

а) $\mathrm{tg}^2 x = 1,\quad \mathrm{tg}x = \pm 1 \Rightarrow \mathrm{ctg}x = \pm 1,$ и система (**), равносильная исходной, принимает вид

$$\begin{cases} 5\sin y = \pm 3\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ 5\cos y = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \end{cases}$$

$\sin y = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, т. е. при $tgx = 1$ y лежит в I четверти, при $\mathrm{tg}x = -1$ – y в III четверти. Таким образом, первая серия решений выглядит так: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m$; $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \pi + \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m$, т. е. $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \dfrac{\pi}{2} \mp \dfrac{\pi}{2} + \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m.$

б) $\mathrm{tg}^2 x = 4$, $\mathrm{tg}x = \pm 2$, $\mathrm{ctg}x = \pm\dfrac{1}{2}$, система (**) принимает вид:

$$\begin{cases} 5\sin y = \pm 3\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ 5\cos y = \mp\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \end{cases} \quad \sin y = \pm\frac{3}{\sqrt{10}},\ \cos y = \mp\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$y = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} \mp \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $y = \dfrac{\pi}{2} \mp \dfrac{\pi}{2} + \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m$;

$$x = \pm\mathrm{arctg}2 + \pi\mathrm{n},\ y = \frac{3\pi}{2} \mp \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + 2\pi m.$$

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cos 3x = \sin(x + 2y), \\ 3\sin(2x + y) = -\cos 3y. \end{cases}$$

Решение. Заметим вначале, что система $\begin{cases} A = B, \\ C = D \end{cases}$ не является равносильной системе $\begin{cases} A = B, \\ AD = BC, \end{cases}$ а именно, вторая из них имеет решения $A = B = 0,\ C \neq D,$ не удовлетворяющие первой системе.

Для получения дополнительного соотношения между переменными, перемножим уравнения:

$$-\cos 3x \cos 3y = \sin(x+2y)\sin(2x+y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\cos(3x+3y) - \cos(3x-3y) = \cos(y-x) - \cos(3x+3y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(y-x) + \cos(3(y-x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(2(y-x))\cos(y-x) = 0$$

а) $\cos(2(y-x)) = 0,\ y - x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}.$ Для упрощения дальнейших вычислений рассмотрим 4 случая: 1) $n = 4m, y = x + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m,$

2) $n = 4m+1,\ y = x + \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi m,$ 3) $n = 4m+2,\ y = x + \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi m,$

4) $n = 4m+3,\ y = x + \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi m.$ Имеем:

1) $\begin{cases} 3\cos 3x = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2} + 4\pi m\right), \\ 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi m\right) = -\cos\left(3x + \dfrac{3\pi}{4} + 6\pi m\right), \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\cos 3x = \cos 3x, \\ 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(3x + \dfrac{3\pi}{4}\right). \end{cases}$

Отсюда

$\cos 3x = 0,\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow 3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\cos\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. Итак, мы получили посторонние решения (см. замечание в начале решения).

В случаях 2-4 аналогично доказывается отсутствие решений системы.

б) $\cos(y-x)=0,\ \ y=x+\frac{\pi}{2}+\pi n.$ Имеем:

$$\begin{cases}3\cos 3x=\sin(3x+\pi+2\pi n),\\ 3\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=-\cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}+3\pi n\right),\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\cos 3x=-\sin 3x,\\ 3\cdot(-1)^n\cos 3x=(-1)^{n+1}\sin 3x,\end{cases}$$

откуда $\mathrm{tg}3x=-3$.

Ответ: $x=-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}3+\frac{\pi m}{3},\ \ y=-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}3+\frac{\pi m}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi n.$

В ряде случаев решение основывается на оценке левой и правой частей уравнения. При этом уравнение $A=B$ в случае $A\ge a, B\le a$ равносильно системе $\begin{cases}A=a,\\ B=a.\end{cases}$

Пример 16. Решить уравнение $3\sin 5x=\cos 2x-\cos 8x-\sin 15x.$

Решение. Преобразуем уравнение:

$$3\sin 5x=2\sin 5x\sin 3x-\sin 15x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 5x+(\sin 5x+\sin 15x)=2\sin 5x\sin 3x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 5x+2\sin 10x\cos 5x=2\sin 5x\sin 3x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 5x\left(1+2\cos^2 5x-\sin 3x\right)=0.$$

а) $\sin 5x=0,\ \ x=\frac{\pi n}{5}.$

б) $1+2\cos^2 5x-\sin 3x=0\Rightarrow\sin 3x=1+2\cos^2 5x.$

Левая часть не превосходит 1, правая часть не меньше 1, поэтому полученное уравнение дает систему

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 5x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi n}{3}, \\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi m}{5}. \end{cases}$$

Отметим, что грубой ошибкой была бы нумерация решений этих уравнений одной буквой. Итак,

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5} \Rightarrow 5 + 20n = 3 + 6m,\ 1 + 10n = 3m.$$

Для нахождения пар целых чисел, для которых возможно последнее равенство, перепишем его в виде

$$m = \frac{10n + 1}{3} = 3n + \frac{n + 1}{3}.$$

Отсюда

$$n + 1 = 3k,\ \ n = 3k - 1$$

и тогда

$$m = 10k - 3,\ \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3k - 1)}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{5}$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ (среди полученных решений нет повторяющихся, т. к. равенство $\dfrac{\pi n}{5} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ дает $2(10k - n) = 5$, что невозможно).