§1. Решение тригонометрических уравнений

Тема «Тригонометрия» достаточно широко представлена в школьном курсе математики, поэтому вы знакомы со схемой решения многих тригонометрических уравнений: они сводятся преобразованиями, использующими тригонометрические тождества, и (или) заменой переменных к нескольким простейшим уравнениям.

К простейшим мы относим уравнения $\sin x = a,\ |a| \le 1;\ \cos x = a,\ |a| \le 1;\ tgx = a,\ a \in R,$ решения которых, соответственно, задаются формулами

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \qquad (1)$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n \qquad (2)$$

$$x = arctg\, a + \pi n \qquad (3)$$

(Здесь и далее мы будем опускать записи $n\ (m,\ k,\ l) \in Z,$ так как эти буквы будут использоваться только при выписывании решений простейших тригонометрических уравнений.)

Следует напомнить, что с точки зрения школьной (элементарной) математики уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ имеют решения только при $|a| \le 1$. К сожалению, очень часто абитуриенты допускают ошибки на заключительном этапе выполнения заданий по тригонометрии после сведения их к уравнениям вида $\sin x = a,\ \cos x = a.$ **Не может быть зачтено** решение задачи, если, например, получив простейшее уравнение $\sin x = \frac{1}{3},$ школьник (абитуриент) пишет $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi m$ (убедитесь самостоятельно в том, что приведенная формула дает также все решения уравнения $\sin x = -\frac{1}{3}$), либо если в ответе присутствует запись вида $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n$ (равенство $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ невозможно, т. к. $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$).

Заметим еще, что хотя формулы (1), (2) верны при всех значениях a, удовлетворяющих условию $|a| \le 1$, в случае $a = 0, \pm 1$ ими лучше не пользоваться. Так для уравнения $\sin x = 1$ формула (1) дает ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + \pi n$, в котором каждый корень указывается дважды: при $n = 2m$ $x = (-1)^{2m} \frac{\pi}{2} + 2\pi m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ и при $n = 2m+1$ $x = (-1)^{2m+1} \frac{\pi}{2} + \pi(2m+1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$ Лучше использовать формулы: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, для записи решений уравнений $\sin x = \pm 1$.

$x = \pi n$ для $\sin x = 0,$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ для $\cos x = 0,$

$x = 2\pi n$ для $\cos x = 1$, $x = \pi + 2\pi n$ для $\cos x = -1.$

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x + \cos x \cos 2x + 3\cos x = 0.$

Решение. Воспользовавшись тождеством $\sin 2x = 2\sin x \cos x,$ преобразуем уравнение к виду: $\cos x(2\sin x + \cos 2x + 3) = 0.$ Мы получили совокупность уравнений $\cos x = 0$ и $2\sin x + \cos 2x + 3 = 0.$ Из первого уравнения находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$ Второе после замены $t = \sin x$ сводится к квадратному уравнению $2t + 1 - 2t^2 + 3 = 0,$ откуда $t = -1,$ $t = 2.$ Уравнение $\sin x = 1$ дает корни $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,$ уравнение $\sin x = 2$ решений не имеет.

Отметим, что ответ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,$ являющийся формально правильным, не является математически точным, т. к. серия корней $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$ входит в серию $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ при $n = 2m - 1$ (если $\sin x = -1,$ то $\cos x = 0$).

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n.$

Обобщением рассмотренного выше являются уравнения вида

$$a\sin x+b\cos 2x=c, \tag{4}$$

$$a\cos x+b\cos 2x=c, \tag{5}$$

сводящиеся к квадратным относительно t путем замен $t=\sin x$ и $t=\cos x$ в силу тождеств $\cos 2x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1.$

Важно заметить, что применение некоторых тригонометрических формул может привести к изменению множества допустимых значений аргумента. Так, использование равенств

$$tg 2x=\frac{2tg\, x}{1-tg^2 x},\ \sin 2x=\frac{2tg\, x}{1+tg^2 x},\ \cos 2x=\frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$$

может привести к потере корней, т. к. значения $tg 2x,\ \sin 2x,\ \cos 2x$ существуют при $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,$ в то время как $tg\, x$ при указанных x не существует. Поэтому необходима проверка принадлежности указанных значений переменной множеству решений.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x+3\cos x+3=0.$

Решение. Введем новую переменную $t=tg\dfrac{x}{2}.$ Тогда $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},$ $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},$ откуда $t=-3.$ Следовательно $tg\dfrac{x}{2}=-3,$ $x=2\left(arctg(-3)+\pi n\right)=-2arctg3+2\pi n.$ Далее, согласно сделанному замечанию, мы должны проверить значения x такие, что $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,$ т. е. $x=\pi+2\pi n.$ Подстановка в уравнение показывает, что все указанные значения x являются корнями.

Ответ: $-2arctg3+2\pi n,\ \pi+2\pi n.$

Другой способ решения приведенного уравнения дает *метод введения дополнительного угла*, позволяющий преобразовать сумму

$S = a\sin x + b\cos x$ к одной тригонометрической функции. Имеем: $S = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$ то существуют углы α и β такие, что $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Поэтому $S = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\alpha),$

а также $S = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\beta\sin x + \cos\beta\cos x) = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(x-\beta).$

Пример 3. Методом введения дополнительного угла решить уравнение примера 2.

Решение. Имеем: $\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\sin x + \frac{3}{\sqrt{10}}\cos x\right) + 3 = 0,$

$\sin(x+\alpha) + \frac{3}{\sqrt{10}} = 0,$ где $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}},$ т. е. можно положить $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$ (если в выражении S $a > 0,\ b < 0,$ то

$\alpha = -\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$ если $a < 0,\ b > 0,$ то

$\alpha = \pi - \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$). Итак, $\sin(x+\alpha) = -\frac{3}{\sqrt{10}},$

$x = -\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} + (-1)^{k+1}\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}} + \pi k.$

Полученные формулы показывают, насколько различными могут быть формы записи ответа (сравните с ответом в примере 2). Если в последней формуле взять $k = 2n + 1,$ то получим

$x=-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}+2\pi n+\pi=\pi+2\pi n,$ если же $k=2n,$ то $x=-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}-\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}+2\pi n=-2arctg3+2\pi n$ в силу равенств $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}=arctg3.$

Пример 4. Решить уравнение $\sin x+\cos x+\sqrt{2}\sin 5x=0.$

Решение. Уравнение преобразуется к виду

$\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)+\sqrt{2}\sin 5x=0,$ т. е. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin 5x=0,$

откуда, согласно формулам для суммы синусов,

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-2x\right)=0.$$

Итак,

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)=0,\ \ x=\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{8}+\pi n\right),$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=0,\ \ x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}+\pi n\right).$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{3},\ \dfrac{5\pi}{16}+\dfrac{\pi n}{2}.$

Пример 5. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\cos x(\sin x-7\cos x).$

Решение. Конечно, можно продифференцировать эту функцию, найти точки, в которых $f'(x)=0,$ и затем, вычислив ее значения в этих точках, найти ответ. Решение будет проще, если заметить, что эта функция линейна по $\sin 2x,\ \ \cos 2x$: $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{7}{2}(1+\cos 2x).$

Отсюда, учитывая, что

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{50}}{2},$$

получаем

$$f(x)=\frac{\sqrt{50}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\sin 2x-\frac{7}{\sqrt{50}}\cos 2x\right)-\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{50}}{2}\sin(2x-\alpha)-\frac{7}{2}.$$

Наибольшее значение $f(x)$ равно $\frac{\sqrt{50}}{2}-\frac{7}{2}=\frac{5\sqrt{2}-7}{2}$, и оно достигается, когда, например, $2x-\alpha=\frac{\pi}{2}$, т. е. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{50}}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}-7}{2}$.

К уравнениям, решаемым по стандартной схеме, относятся также *однородные уравнения* относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Мы рассмотрим однородные уравнения первого порядка:

$$a\sin x+c\cos x=0 \qquad (6)$$

и второго порядка:

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0. \qquad (7)$$

Случаи $a=0$ или $c=0$ для (6) сразу дают $\cos x=0$ или $\sin x=0$. Если же $a\neq 0$, $c\neq 0$, то $\cos x\neq 0$ (иначе $\sin x=0$ и тогда $\sin^2 x+\cos^2 x=0$), и мы получаем $\operatorname{tg} x=-\frac{c}{a}$.

Уравнение (7) в случаях $a=0$ или $c=0$ сразу сводится к (6), если же $a\neq 0$, $c\neq 0$, то вновь $\cos x\neq 0$. Разделив обе части (7) на $\cos^2 x$, мы получаем квадратное уравнение относительно
$t=\operatorname{tg}x$: $at^2+bt+c=0$.

Пример 6. Решить уравнение $\sin x+3\cos x=1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}.$$

Отсюда $4\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0$, т. е. $2t^2-t-1=0$,

где $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Имеем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$

или $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, $x = 2\left(-arctg\frac{1}{2} + \pi n\right)$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n$.

Еще одним классом уравнений, включаемых нами в список стандартных, являются уравнения вида

$$a(\sin x \pm \cos x) + b\sin 2x = c. \qquad (8)$$

Из основного тригонометрического тождества следует, что $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x\cos x = 1 \pm \sin 2x$. Поэтому замена $t = \sin x \pm \cos x$ сводит уравнение (8) к квадратному.

Пример 7. Решить уравнение $\sin x - \cos x + \sin 2x + 1 = 0$.

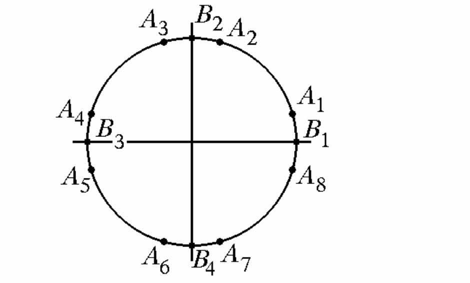
Решение. Положив $t = \sin x - \cos x$, получаем $t^2 = 1 - \sin 2x$, т. е. $\sin 2x = 1 - t^2$, следовательно, $t + 1 - t^2 + 1 = 0$, откуда $t = -1$, $t = 2$. Значит, $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1{,}2$. В первом случае $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$. Это решение удобнее записать в виде двух серий: $x = 2\pi m$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$, получаемых при $n = 2m$ и при $n = 2m + 1$. Во втором случае ($t = 2$) имеем: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, что невозможно.

Ответ: $2\pi m$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi m$.

Как и при решении алгебраических уравнений, нередко для упрощения вида тригонометрических уравнений необходимо применение преобразований, расширяющих множество допустимых значений переменной (возведение в квадрат, умножение обеих частей уравнения на некоторую функцию), приводящих, возможно, к приобретению посторонних корней. Схема действия при этом такая же, как и при решении обычных алгебраических уравнений.

Пример 8. Решить уравнение $\frac{\sin x}{\sin 3x}+\frac{\sin 5x}{\sin x}=8\cos x\cos 3x.$

Решение. Умножив обе части уравнения на $\sin x\sin 3x$, мы, естественно, можем приобрести посторонние корни. Поэтому, решив полученное уравнение, мы должны отбросить корни, для которых $\sin x=0$ или $\sin 3x=0.$ Имеем: $\sin^2 x+\sin 3x\sin 5x=8\cos x\cos 3x\sin x\sin 3x.$ Отсюда, используя формулы понижения, синуса двойного угла и преобразования



произведения синусов в сумму, получаем:

$$\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x)=2\sin 2x\sin 6x,$$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8x=\cos 4x-\cos 8x,\ 1=2\cos 4x-\cos 8x$ –уравнение вида (5).

Положив $t=\cos 4x,$ получаем $1=2t-\left(2t^2-1\right),$ откуда $t=0,\ t=1.$

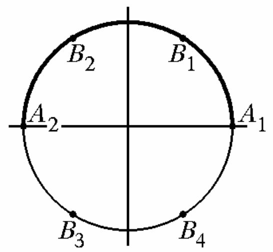
Итак, $\cos 4x=0,$ $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$ или $\cos 4x=1,$ $x=\frac{\pi n}{2}.$ Отбор посторонних корней наиболее просто производить на тригонометрическом круге. Отметим на нем точки A_1, A_2, ... A_8, соответствующие первой серии корней, и B_1, B_2, B_3, B_4 – второй серии и вычислим значения $\sin x,$ $\sin 3x$ в отмеченных точках. При этом рассматриваются только $x\in[0;2\pi),$ так как 2π является периодом как для $\sin x,$ так и для $\sin 3x.$ В итоге мы обнаружим, что посторонними являются корни, соответствующие точкам B_1 и B_3 тригонометрического круга.

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4},\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n.$

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{1-\cos 4x}=\sin x.$

Решение.

I способ. Уравнение $\sqrt{A(x)}=B(x),$ как вы хорошо знаете из курса алгебры, равносильно системе $\begin{cases} A(x)=B^2(x), \\ B(x)\ge 0, \end{cases}$ поэтому из корней, которые мы получаем после возведения в квадрат, нужно выбрать те, для которых $\sin x\ge 0.$ Имеем: $1-\cos 4x=\sin^2 x,$ т. е. $1-\cos 4x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ – уравнение вида (5). Положив $t=\cos 2x,$ получаем $4t^2-t-3=0,$ откуда $\cos 2x=1,$ $x=\pi n$ или $\cos 2x=-\dfrac{3}{4},$ $x=\dfrac{1}{2}\left(\pi\pm\arccos\dfrac{3}{4}+2\pi n\right).$ Отметив полученные корни на тригонометрическом круге, увидим, что неравенству $\sin x\ge 0$ (выделенная дуга) удовлетворяют те решения, которые соответствуют точкам $A_1,\ B_1,\ B_2,\ A_2.$



II способ. В данном уравнении естественным является применение формулы $\sin\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}.$ К сожалению, такая запись тождества $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ нередко приводит к путанице и непониманию. Она порождает представления о какой-то «двузначности» синуса (косинуса) половинного аргумента. В действительности она означает, что если $\sin\alpha \geq 0$, то $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, а если $\sin\alpha < 0$, то $\sin\alpha = -\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$. Другими словами, $|\sin\alpha| = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{2}|\sin 2x| = \sin x$.

Левая часть уравнения неотрицательна, поэтому $\sin x \geq 0$ и, значит, $\sin x$ можно вынести из-под знака модуля: $2\sqrt{2}\sin x|\cos x| = \sin x$, $\sin x\left(2\sqrt{2}|\cos x| - 1\right) = 0$, следовательно, $\sin x = 0$, $x = \pi n$ или $|\cos x| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cos x = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $x = \pm\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \pi n$. С помощью тригонометрического круга устанавливаем, что неравенству $\sin x \geq 0$ удовлетворяют корни $x = \pi n$, $x = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m$,

$$x = \pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m.$$

Ответ: πn, $\dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{4} + 2\pi m$ (иначе: $x = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m$,

$$x = \pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m\ ).$$

В конце параграфа напомним, что при решении уравнений выражение $\sin f(x) \pm \cos g(x)$ можно преобразовать в произведение, воспользовавшись формулами приведения и преобразованием суммы (разности) одноименных тригонометрических функций в произведение.

Пример 10. Решить уравнение $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\cos 2x\right) = \cos\left(\dfrac{4}{3}\pi\sin x\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\pi\sin x\right)=0,$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{12}\cos 2x-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\sin x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\cos 2x+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\pi\sin x\right)=0.$$

Отсюда

а) $\frac{\pi}{12}\cos 2x-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\sin x=\pi n$ либо

б) $\frac{\pi}{12}\cos 2x+\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\pi\sin x=\frac{\pi}{2}+\pi n.$

В случае а) $\cos 2x-3+8\sin x=12n$ и, положив $t=\sin x,$ получаем: $2t^2-8t+(12n+2)=0,$ откуда $\sin x=2\pm\sqrt{3-6n},$ т. е. $n\le 0.$ Сумма $2+\sqrt{3-6n}$ больше 1, поэтому $\sin x=2-\sqrt{3-6n},$ т. е. $n=0$ или $n=-1,$ так как при $n\le -2$ имеет место неравенство $2-\sqrt{3-6n}<-1.$ Итак, при $n=0$ $\sin x=2-\sqrt{3},$ $x=(-1)^m\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi m,$ при $n=-1$ $\sin x=-1,$ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m.$

В случае б) $\cos 2x-8\sin x=3+12n,$ аналогично п. а) $\sin x=-2+\sqrt{3-6n},$ $n=0,\ -1,$

$x=(-1)^m\arcsin\left(-2+\sqrt{3}\right)+\pi m,$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m.$

Полученные ответы можно объединить в две серии.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,$ $x=\pm\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi k.$