Федеральное агентство по образованию
Федеральная заочная физико-техническая школа
при Московском физико – техническом институте
(государственном университете)

МАТЕМАТИКА

Комплексные числа

Задание №6 для 11-х классов

(2004-2005 учебный год)

г. Долгопрудный, 2005

Составитель: Т. В. Михайлова, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №6 для 11-х классов (2004-2005 учебный год). - М.: МФТИ, 2005, 24с.

Составитель:
Михайлова Татьяна Валентиновна
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 04.02.05
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5
Уч.-изд. л.1,33. Тираж 1900. Заказ №2-з.

Заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый натуральный ряд чисел 1, 2, ... n, ... В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

§ 1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Комплексные числа. Комплексными числами называют выражения вида $a+ib$, где a и b – любые действительные числа, i – некоторый символ, для которых следующим образом вводятся понятия равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа $a+ib$ и $c+id$ *равны* тогда и только тогда, когда

$$a=c \quad \text{и} \quad b=d;$$

б) *суммой* чисел $a+ib$ и $c+id$ называется число

$$a+c+i(b+d);$$

в) *произведением* чисел $a+ib$ и $c+id$ называется число

$$ac-bd+i(ad+bc).$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам:

$$(a+ib)+(c+id)=a+c+i(b+d), \qquad (1)$$

$$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc). \qquad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой z или w). Равенство $z=a+ib$ означает, что комплексное число $a+ib$ обозначено буквой z.

Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z=a+ib$ и обозначается Re z; пишут Re $z=a$ или Re$(a+ib)$ = a. Число b называется мнимой частью числа $z=a+ib$ и обозначается Im z, пишут Im z = b или Im $(a$ + i$b)$ = b. Символ i называется мнимой единицей.

Заметим, что операции сложения и умножения над числами $a+i0$ проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a+i0)+(c++i0)=a+c+i0,$$

$$(a+i0)(c+i0)=(ac)+i0.$$

Таким образом, отождествив число $a+i0$ с действительным числом a, получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел, а именно $a=a+i0$. В частности, число $0=0+i0$ будем, как обычно, называть нулем, а число $1=1+i0$ – единицей.

Числа $0+ib$ называют чисто мнимыми и обозначают ib: $0+i7=7i$, $0-i2=-2i$.

На основании формулы (2) найдем значение выражения $i^2=ii$:

$$i^2=ii=(0+i1)(0+i1)=-1+i0=-1.$$

Таким образом,

$$i^2=-1. \qquad (3)$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т.к. она получается автоматически, если перемножить двучлены $a+ib$ и $c+id$, а затем на основании формулы (3) заменить i^2 на -1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1=8+3i$ и $z_2=-5+2i$. По формуле (1) находим

$$z_1 + z_2 = 8 - 5 + i(3+2) = 3 + 5i.$$

Формально перемножая двучлены $(8+3i)$ и $(-5+2i)$ и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1 z_2 = (8+3i)(-5+2i) = -40 - 15i + 16i + 6i^2 = -40 + i - 6 = -46 + i.$$

2. Свойства операций над комплексными числами. Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения*:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2.

2. *Ассоциативность сложения*:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

3. $z + 0 = z$ для любого комплексного числа z.

4. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует число z такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется *разность* чисел z_2 и z_1 и обозначается $z_2 - z_1$.

5. *Коммутативность умножения*:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2.

6. *Ассоциативность умножения*:

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

7. *Дистрибутивный закон*

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3.

8. $1 \cdot z = z$ для любого комплексного числа z.

9. Для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_1 \neq 0$, существует число z такое, что $z_1 z = z_2$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_1 и z_2 и обозначается $\dfrac{z_2}{z_1}$. Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения операций сложения и умножения (см. формулы (1) и (2)) и равенства комплексных чисел. Докажем свойство 9; остальные докажите самостоятельно.

Пусть $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, $z_2 \neq 0$, т.е. хотя бы одно из чисел c или d отлично от нуля, $z = x + iy$. Тогда равенство $zz_2 = z_1$ запишется так:

$$a + ib = (x + iy)(c + id) = xc - yd + i(xd + yc).$$

Отсюда имеем, что x и y удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \qquad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \qquad (4)$$

Пример 2. Найти разность $z_1 - z_2$ и частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ комплексных чисел

$$z_1 = 2 - 7i \text{ и } z_2 = -1 + 3i.$$

Находим разность

$$z_1 - z_2 = (2-7i) - (-1+3i) = (2-(-1)) + i(-7-3) = 3 - 10i.$$

С помощью формулы (4) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(-1)+(-7)3}{1+9} + i\frac{-7(-1)-2\cdot 3}{1+9} = \frac{-23}{10} + \frac{1}{10}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяется; записи вида $z > 3 + i$ и им подобные лишены всякого смысла.

§ 2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. Комплексная плоскость. Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ поставим в соответствие точку $M(a,b)$ координатной плоскости, т.е. точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z = a$, а ордината равна $\operatorname{Im} z = b$. Обратно, каждой точке плоскости с координатами (a,b) поставим в соответствие комплексное число $z = a + ib$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, т.к. на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a + i0$, т.е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* – на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0 + bi$.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a + bi$ как вектор $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 1). Очевидно, что каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0,0)$ и концом в точке $M(a,b)$ соответствует комплексное число $a + bi$ и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0 + 0i$.

Взаимно однозначные соответствия, установленные между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством векторов плоскости позволяют называть комплексное число $z = a + bi$ точкой $a + bi$ или вектором $z = a + ib$.

2. Модуль комплексного числа. Перейдем к понятию модуля комплексного числа.

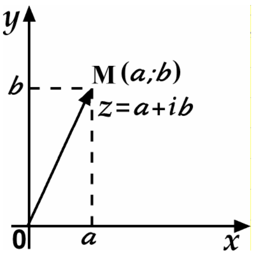

Рис. 1

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + ib$ называется длина вектора, соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z|$ или буквой *r*. Применяя теорему Пифагора, получим, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (см. рис. 1).

Если $z = a + 0i$, то $|z| = |a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$, то есть для действительного числа модуль совпадает с абсолютной величиной этого числа.

Очевидно, что $|z| > 0$ для всех $z \neq 0$; $|z| = 0$ в том и только том случае, когда $z = 0 + i0 = 0$.

Пусть $z = a + ib$. Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + ib$ и обозначается $\bar{z}$; $\bar{z} = a - bi$ (см. рис.2).

Заметим, что

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2},\ z_2 \neq 0.$$

Полученное соотношение сводит деление комплексных чисел z_1 и z_2 к умножению чисел z_1 и $\bar{z}_2$ и к делению их произведения на действительное положительное число $|z_2|^2$, что позволяет не запоминать довольно громоздкую формулу (4).

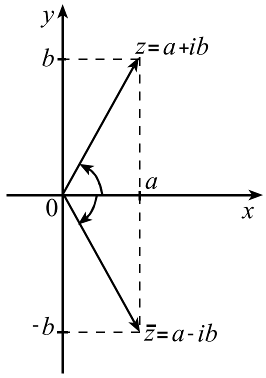

Рис. 2

Пример 1. Найти частное $\dfrac{3-5i}{-1+10i}$.

Умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, имеем

$$\frac{3-5i}{-1+10i} = \frac{(3-5i)(-1-10i)}{(-1+10i)(-1-10i)} = \frac{-3+5i-30i+50i^2}{1+100} = -\frac{53}{101} - \frac{25}{101}i.$$

3. Геометрический смысл сложения, вычитания и модуля разности двух комплексных чисел. Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$. Им соответствуют векторы с координатами (a_1, b_1) и (a_2, b_2). Тогда числу

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

будет соответствовать вектор с координатами $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2, надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2. Аналогично, разности $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует разность векторов, соответствующих числам z_1 и z_2.

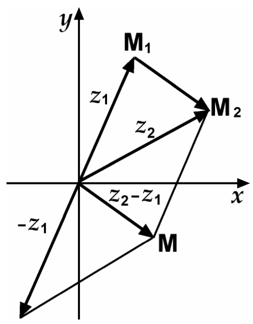

Рис. 3

Модуль $|z_1 - z_2|$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 по определению модуля есть длина вектора $z_1 - z_2$. Построим этот вектор, как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$ (см. рис. 3). Получим вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$. Следовательно, $|z_1 - z_2|$ есть длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то есть модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.

С помощью полученного соотношения решим следующие задачи.

Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z - i| = 1$, б) $1 < |z + 3 + i| < 3$,

в) $|z - 1| < |z + 1|$?

а) Условию $|z - i| = 1$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 1. Такие точки лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке i (см. рис. 4).

б) Условию $1 < |z + 3 + i| < 3$ удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки ($-3 - i$) на расстояние, большее 1, но меньше 3. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в точке (–3 – i) и радиусами $R_1 = 1, R_2 = 3$ (см. рис. 5: искомое множество заштриховано).

в) Используя геометрическую интерпретацию модуля разности двух комплексных чисел, задачу переформулируем так: найти множество точек комплексной плоскости, которые расположены ближе к точке $z = 1$, чем к точке $z = -1$. Ясно, что это все точки плоскости, лежащие правее мнимой оси, и только они (см. рис. 6: искомое множество заштриховано).

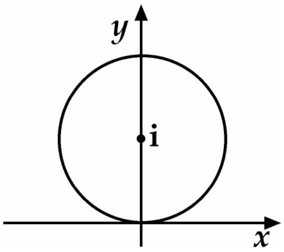

Рис. 4

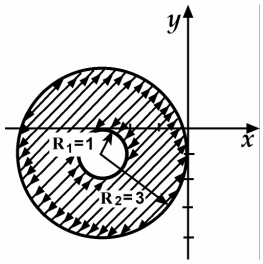

Рис. 5

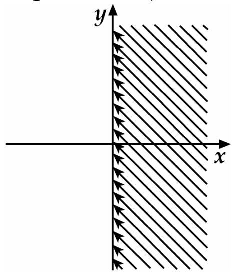

Рис. 6

4. Аргументы комплексного числа. Аргументом комплексного числа $z = a + ib\,(z \neq 0)$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z; величина угла считается положительной, если отсчет угла производится против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения того факта, что число φ является аргументом числа $z = a + ib$, пишут $\varphi = \arg z$ или $\varphi = \arg(a + ib)$.

Для числа $z = 0$ аргумент не определяется. Поэтому во всех последующих рассуждениях, связанных с понятием аргумента будем считать, что $z \neq 0$.

Заметим, что заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно; число $z = 0$ – единственное комплексное число, которое определяется заданием только своего модуля ($|z| = 0$).

С другой стороны, если задано комплексное число, то, очевидно, модуль этого числа всегда определен единственным образом в отличие от аргумента, который всегда определяется неоднозначно: если φ – некоторый аргумент числа z, то углы $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ тоже являются аргументами того же числа z. Например, аргументами числа $(-1 - i)$ являются углы $-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{15\pi}{4}$ и т.д. (см. рис.7).

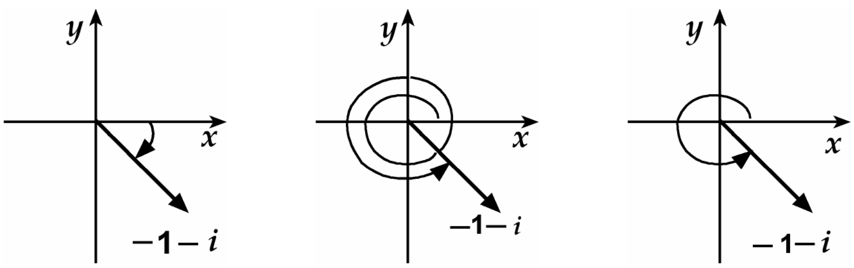

Рис. 7

Таким образом, для каждого числа z имеется бесконечное множество аргументов, любые два из которых отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Из определения тригонометрических функций (см. рис. 8) следует, что если $\varphi = \arg(a + ib)$, то имеет место следующая система

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \qquad (5)$$

Справедливо и обратное: если выполняются равенства системы (5), то $\varphi = \arg(a+ib)$.

При решении задач на нахождение аргумента конкретного комплексного числа $z = a+ib$ полезно использовать геометрическую интерпретацию комплексного числа для определения той четверти, где находится точка $z = a+ib$, а после того, как это сделано, можно для нахождения аргумента воспользоваться одним (любым) из уравнений (5). Заметим, что аргументы чисел z и $\bar{z}$, $z \neq 0$, связаны соотношением:

$\arg\bar{z} = -\arg z$ (см. рис.2).

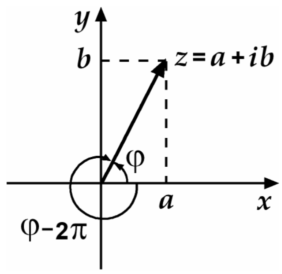

Рис. 8

Пример 5. Найти аргумент числа $z = 1-i$.

Так как $\operatorname{Re} z = 1 > 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0,$ то точка $z = 1-i$ лежит в IV четверти. Поэтому достаточно такое решение одного из двух уравнений (5), которое является углом в IV четверти. Получаем

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Заметим, что если $\varphi = \arg(a+ib),\ a \neq 0,$ то из (5) следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}.$

Обратное утверждение неверно. В самом деле, число $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ является решением уравнения $\operatorname{tg}\varphi = -1,$ но не является аргументом числа $(1-i).$

Пример 6. Найти аргумент числа $z = (-1-i).$

Так как $\operatorname{Re} z = -1 < 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0,$ то точка $z = -1-i$ лежит в III четверти. Следовательно, надо найти такое решение уравнения

$\operatorname{tg}\dfrac{-1}{-1} = 1,$ которое является углом в III четверти. Получаем

$$\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $a = 0,$ то есть $z = bi,$ то либо $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ (если $b > 0$), либо $\arg z = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ (если $b < 0$).

§ 3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Запись комплексного числа z в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим другие формы записи комплексных чисел. Пусть r – модуль, а φ – какой-либо из аргументов комплексного числа $z = a+ib$, то есть $r = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \arg(a+ib).$ Тогда из формулы (5) следует, что $a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi,$ и, значит,

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запись комплексного числа в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется ее *тригонометрической формой*.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа $a+bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

Пример 7. Записать число $z=\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме.

Находим модуль

$$r=|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2.$$

Находим один из аргументов; так как $\operatorname{Re} z=\sqrt{3}>0, \operatorname{Im} z=-1<0,$ то число $\sqrt{3}-i$ лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-1}{\sqrt{3}},$ которое является углом в IV четверти, т.е. $\varphi=\frac{11\pi}{6}.$

Таким образом,

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Пример 8. Найти сумму $z_1+z_2+z_3+z_4+z_5$, если $|z_k|=r>0,\ \arg z_k=\frac{2\pi k}{5},\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

$$\frac{1}{r}(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5)=(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+$$

$$+\cos\frac{10\pi}{5})+i\left(\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}+\sin\frac{10\pi}{5}\right)=$$

$$=\left(2\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{6\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)+i\cdot 0=$$

$$=2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot 2\cos\frac{5\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+1=-4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}+1=$$

$$=\frac{-4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}+1=\frac{-2\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{-\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=0.$$

2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\qquad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1z_2=$$

$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\cdot(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\varphi_2\sin\varphi_1))=$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).\qquad (6)$$

Таким образом, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения*.

Пусть $z_2\neq 0,$ тогда

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).\qquad (7)$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного*.

3. Возведение в степень и извлечение корня. Формула (6) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ – аргументы чисел $z_1, z_2, ..., z_n$ соответственно, то

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \arg(z_1 z_2 ... z_n),$$

$$|z_1|\,|z_2| ... |z_n| = |z_1 z_2 ... z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (8)$$

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени*.

Формула (8) называют *первой формулой Муавра*.

Пример 9. Найти z^{11}, если $z = 1 - i$.

Так как $|1 - i| = \sqrt{2}$, а одним из аргументов является $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ (см. пример 5), то

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно, применяя формулу (8), получим

$$z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right] = 2^{11/2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{11/2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\sqrt{2}^{10}(1+i) = -2^5(1+i).$$

Перейдем к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число z называется *корнем степени n*, $n\, n \in \mathbb{N}$ из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $z^n = \omega$.

Таким образом, для того, чтобы извлечь корень степени n, $n \in \mathbb{N}$ из числа ω, достаточно решить уравнение $z^n = \omega$.

Если $\omega = 0$, то при любом n уравнение $z^n = 0$ имеет одно и только одно решение $z = 0$.

Пусть теперь $\omega \neq 0$. Представим z и ω в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \omega = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Тогда уравнение $z^n = \omega$ примет вид

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно,

$$r^n = r_0, \qquad n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \qquad \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, все решения уравнения $z^n = \omega$ даются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right),$$

$$k = 0, 1, ..., (n-1). \qquad (9)$$

В самом деле, придавая числу k в формуле (9) целые значения, отличные от 0, 1, ..., (n-1), мы не получим других комплексных чисел. Например при $k = n$ получаем

$$z_n = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right) = \omega.$$

Формула (9) называется *второй формулой Муавра.*

Таким образом, если $\omega \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа ω: все они содержатся в формуле (9).

В частности, если $n = 2$, то уравнение $z^2 = \omega$ имеет два корня:

$$z_1 = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + i\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right)\right) = -z_1,$$

то есть эти корни симметричны относительно начала координат.

Также из формулы (9) нетрудно получить, что если $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ то точки, изображающие все корни уравнения $z^n = \omega$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\sqrt[n]{|\omega|}$.

Пример 10. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Запишем число $\omega = -8$ в тригонометрической форме:

$$\omega = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Применяя формулу (9), получаем

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right), \ k = 0, 1, 2.$$

Следовательно,

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i.$$

Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2, находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 9).

Из сказанного выше видно, что символ $\sqrt[n]{\omega}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$, или одно, и, если одно, то какое именно.

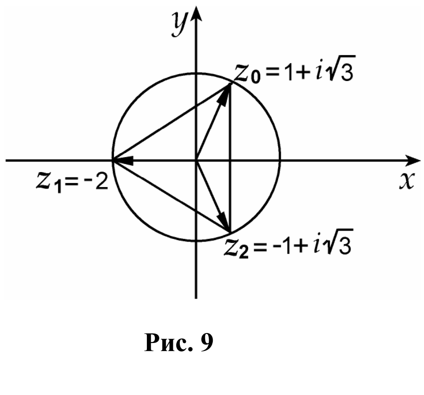

Рис. 9

§ 4. Алгебраические уравнения

1.Квадратные уравнения. В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0, \qquad (10)$$

с действительными коэффициентами *a, b, c.* Там было показано, что если дискриминант уравнения (10) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{где } D=b^2-4ac\geq 0. \qquad (11)$$

В случае, если $D<0,$ говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (11) использовался прием выделения квадрата трехчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)$$ откуда и получалась формула (11). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются в множестве комплексных чисел.

Таким образом, в множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2+bz+c=0, a\neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D=b^2-4ac=0,$ уравнение имеет один корень; $D\neq 0,$ уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула

$$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$

где под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня.

Пример 11. Решить уравнение $z^2+z+1=0.$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-1+\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3},$ то

$$z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 12. Решить уравнение $z^2+(2i-3)z+5-i=0.$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-(2i-3)+\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2}=\frac{3-2i+\sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{-15-8i}$ положим

$$\sqrt{-15-8i}=x+iy.$$

Тогда

$$-15-8i=x^2-y^2+2ixy$$

и, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases}x^2-y^2=-15,\\ 2xy=-8,\end{cases}$$

причем x и y действительные числа. Система имеет два действительных решения $x_1=1, y_1=-4$ и $x_2=-1, y_2=4.$

Поэтому

$$z_1=\frac{3-2i+(1-4i)}{2}=\frac{4-6i}{2}=2-3i,$$

$$z_2=\frac{3-2i+(-1+4i)}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i.$$

2. Уравнения высших степеней. Формула (9) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n = a$, т.е. двучленного уравнения степени *n*. Неизмеримо сложнее обстоит дело в случае общего *алгебраического* уравнения степени *n*:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad (12)$$

где $a_0, \ldots, a_n$ – заданные комплексные числа.

Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ или решением уравнения (12), если $P_n(z_0) = 0$.

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема, называемая *теоремой Безу:*

Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ *на* $z - z_0$ *равен* $P_n(z_0)$, *т.е. равен значению этого многочлена при* $z = z_0$.

Действительно, $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r(z)$, где остаток $r(z)$, если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $z - z_0$, т. е. степень остатка $r(z)$ равна нулю. Следовательно, $r(z) = r$ является числом:

$$P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r.$$

Положим в этом равенстве $z = z_0$. Получаем $P_n(z_0) = r$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что если z_0 корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на $z - z_0$ и $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)$.

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (12) всегда допускает представление в виде произведения:

$$a_0 (z - z_1)^{a_1} (z - z_2)^{a_2} \cdots (z - z_k)^{a_k},$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_k$ – некоторые различные комплексные числа, а $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – натуральные числа, причем

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$$

(доказательство может быть произведено индукцией по *n*).

Отсюда следует, что числа $z_1, z_2, \ldots, z_k$ и только они являются корнями уравнения (12). При этом говорят, что z_1, является корнем кратности a_1, z_2 – корнем кратности a_2 и т.д.

Если условиться корень уравнения считать столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней.*

Заметим, что если уравнение не является алгебраическим, то эта теорема, вообще говоря, неверна.

Рассмотрим уравнение

$$z^3 = \bar{z}. \qquad (13)$$

Это уравнение третьей степени не является алгебраическим уравнением. Домножая обе части уравнения на $\bar{z}$, получим

$$z^4 = \bar{z} \cdot z, \quad z^4 = |z|^2.$$

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z^4 = r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$ и, следовательно, получаем

$$r^4(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2.$$

Заметим, что уравнение имеет корень $z=0$ (т.е. $r=0$). Поэтому, сокращая на $r^2(r\neq 0)$, получаем

$$r^2(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 1 = 1(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k).$$

Отсюда имеем $r=1,\quad \varphi=\dfrac{2\pi k}{4},\quad k=0,1,2,3.$

Таким образом, уравнение (13) имеет следующие пять корней:

$$z_1=0,\qquad z_2=1(\cos 0+i\sin 0)=1 \text{ при } k=0,$$

$$z_3=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i \text{ при } k=1,$$

$$z_4=1(\cos\pi+i\sin\pi)=-1 \text{ при } k=2,$$

$$z_5=1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-i \text{ при } k=3.$$

И теорема Гаусса, и уточняющая ее только что сформулированная теорема полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1z+a_0=0$ определяется формулой $z=-\dfrac{a_0}{a_1}$, если корень уравнения второй степени

$$a_0z^2+a_1z+a_2=0$$

всегда могут быть легко получены с помощью формулы (11), то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьих и четвертых степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени выше четвертой подобных формул в общем случае вообще не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни конкретного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) часто оказывается полезной следующая теорема: *целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена*.

В самом деле, пусть $z=k$ – целый корень уравнения

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – целые числа. Тогда

$$a_0k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

Отсюда получаем, что

$$a_n=-k(a_0k^{n-1}+a_1k^{n-2}+\cdots+a_{n-1}),$$

то есть k – делитель числа a_n (число $a_0k^{n-1}+a_1k^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 13. Решить уравнение $z^3-4z^2-4z-5=0$.

Рассматривая делители свободного члена $\pm 1,\ \pm 5$, убеждаемся в том, что только $z=5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения $z-5$:

$$\begin{array}{r|l} -\,\begin{array}{l} z^3-4z^2-4z-5 \\ z^3-5z^2 \end{array} & \dfrac{z-5}{z^2+z+1} \end{array}.$$

$$
\begin{array}{l}
-\begin{array}{l} z^2-4z \\ z^2=5z \end{array} \\
\hline
\quad -\begin{array}{l} z-5 \\ z-5 \end{array} \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

Таким образом, $z^3-4z^2-4z-5=(z-5)(z^2+z+1)=0.$

Решая квадратное уравнение $z^2+z+1=0$ (см. пример 10), получаем остальные корни. Итак,

$$z_1=5,\quad z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 14. Найти целые корни уравнения

$$2z^3-5z^2-2z+2=0.$$

Целыми корнями уравнения могут быть только $\pm1,\pm2$. Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Значит, это уравнение целых корней не имеет.

Пример 15. Решить уравнение

$$z^4-2z^3-12z^2+18z+27=0.$$

Проверяя делители свободного члена, получаем, что $z=-1$ есть корень уравнения. Разделив многочлен $z^4-2z^3-12z^2+18z+27$ на $z+1$, получим многочлен $z^3-9z-3z^2+27.$ Корнем уравнения $z^3-9z-3z^2+27=0$ является число $z=3$. Разделив многочлен $z^3-9z-3z^2+27$ на $z-3$, получим z^2-9. Таким образом, исходное уравнение может быть записано в виде

$$(z+1)(z-3)(z^2-9)=0,$$

т.е. имеет два однократных корня $z=-1, z=-3$ и один двукратный корень $z=3$.

При разработке использовалась литература:

1. Пособие по математике для поступающих в вузы: учебн. пособие / Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х. – под ред. Яковлева Г.Н. – 3-е изд. М.: Наука, 1988, Глава X.

2. Лекции и задачи по элементарной математике / Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. - М.: Наука, 1971. Глава IV.

Контрольные вопросы

1(2). Существуют ли такие действительные числа x и y, для которых числа $z_1=8x^2+20i^{13}$ и $z_2=9x^2-4+10yi^3$ являются сопряженными.

2(2). Существуют ли такие комплексные числа z_1 и z_2, $z_1\neq z_2$, для которых $z_1+\dfrac{1}{z_1}=z_2+\dfrac{1}{z_2}$?

3(2). Сколько решений имеет уравнение

$$z^2+|z|^2=0\,?$$

4(2). Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} |z-1+i|=\sqrt{2}, \\ |z|=3? \end{cases}$$

5(6). Является ли тригонометрической формой числа $\sqrt{3}+i$ следующие выражения

а) $2\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right)$;

б) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

в) $-2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

(ответ обосновать)?

6(4). Найдите остаток от деления многочлена $z^{100}-2z^{51}+1$ на z^2-1.

Задачи

1(4). Запишите z в алгебраической форме, если

а) $z=\frac{3+i}{(1-i)^2}+\frac{i(4-i)}{1-2i}$;

б) $z=\frac{(3-i)(1+2i)+6i}{(1+i)^2+2-8i}$.

2(4). Запишите решение системы в алгебраической форме

а) $\begin{cases} z_1+z_2=4, \\ z_1+iz_2=2i; \end{cases}$ б) $\begin{cases} z_1+8iz_2=1, \\ iz_1+z_2=i+5. \end{cases}$

3(8). Запишите z в тригонометрической форме, если

а) $z=-\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}$;

б) $z=(1+i)^4\left(-1+i\sqrt{3}\right)^4$;

в) $z=\frac{(1-i)^6}{(1+i)^6}$;

г) $z=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^6}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^4}$.

4(6). Запишите z в алгебраической и тригонометрической форме, если

$$z=\left(\sin\frac{6\pi}{5}+1+i\cos\frac{6\pi}{5}\right)^5.$$

5(6). Какое множество точек комплексной плоскости задается условием

а) $|z+1-i|=1$;

б) $|z-i|>|z-2i|$;

в) $|z|^2-|z-6=0;|$

г) $\cos|z|=1$;

д) $\sin|z|=0$;

е) $1<z\cdot\bar{z}\le 3,\ \operatorname{Re}z<0,\ \operatorname{Im}z\ge 2$.

6(6). Решите уравнение

а) $2z^2+(2+i)z+1-i=0$;

б) $iz^2 + (2i - 3)z - 6 = 0.$

7(8). Решите уравнение

а) $z^6 + 2z^3 + 1 = 0;$

б) $z^8 - 6z^2 + 9 = 0.$

8(10). Представьте многочлен $P(z)$ в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами, если

а) $P(z) = z^6 - 4z^5 - 2z^3 + 35z^2 + 6z - 36;$

б) $P(z) = z^4 + z^2 + 1;$

в) $P(z) = z^4 + 16.$

9(5). Некоторый многочлен при делении на $(z - 1)$ дает остаток 2, при делении на $(z - 2)$ дает остаток 1, при делении на z дает остаток -4. Найдите остаток от деления этого многочлена на $z(z - 1)(z - 2)$.

10(4). Решите уравнение

$$z^4 + 3z^3 + 5z^2 - 12z - 36 = 0.$$