§ 4. Алгебраические уравнения

1.Квадратные уравнения. В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0, \qquad (10)$$

с действительными коэффициентами *a, b, c.* Там было показано, что если дискриминант уравнения (10) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{где } D=b^2-4ac\geq 0. \qquad (11)$$

В случае, если $D<0,$ говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (11) использовался прием выделения квадрата трехчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\text{отк}$$

уда и получалась формула (11). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда *a*, *b*, *c* являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются в множестве комплексных чисел.

Таким образом, в множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2+bz+c=0, a\neq 0$$

всегда разрешимо. Если $D=b^2-4ac=0,$ уравнение имеет один корень; $D\neq 0,$ уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула

$$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$

где под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня.

Пример 11. Решить уравнение $z^2+z+1=0.$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-1+\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3},$ то

$$z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 12. Решить уравнение $z^2+(2i-3)z+5-i=0.$

По формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z=\frac{-(2i-3)+\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2}=\frac{3-2i+\sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{-15-8i}$ положим

$$\sqrt{-15-8i}=x+iy.$$

Тогда

$$-15-8i=x^2-y^2+2ixy$$

и, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases}x^2-y^2=-15,\\ 2xy=-8,\end{cases}$$

причем x и y действительные числа. Система имеет два действительных решения $x_1=1, y_1=-4$ и $x_2=-1, y_2=4.$

Поэтому

$$z_1=\frac{3-2i+(1-4i)}{2}=\frac{4-6i}{2}=2-3i,$$

$$z_2 = \frac{3-2i+(-1+4i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i.$$

2. Уравнения высших степеней. Формула (9) полностью решает вопрос о существовании и определении всех корней уравнения $z^n = a$, т.е. двучленного уравнения степени *n*. Неизмеримо сложнее обстоит дело в случае общего *алгебраического* уравнения степени *n*:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad (12)$$

где $a_0, ..., a_n$ – заданные комплексные числа.

Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ или решением уравнения (12), если $P_n(z_0) = 0$.

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема, называемая *теоремой Безу:*

Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ *на* $z - z_0$ *равен* $P_n(z_0)$, *т.е. равен значению этого многочлена при* $z = z_0$.

Действительно, $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r(z)$, где остаток $r(z)$, если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $z - z_0$, т. е. степень остатка $r(z)$ равна нулю. Следовательно, $r(z) = r$ является числом:

$$P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0) + r.$$

Положим в этом равенстве $z = z_0$. Получаем $P_n(z_0) = r$, что и требовалось доказать.

Отсюда, в частности, следует, что если z_0 корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на $z - z_0$ и $P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)$.

Справедлива следующая теорема: *каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.* Эта теорема называется теоремой Гаусса или основной теоремой высшей алгебры.

С помощью теоремы Гаусса нетрудно доказать, что левая часть уравнения (12) всегда допускает представление в виде произведения:

$$a_0(z - z_1)^{a_1}(z - z_2)^{a_2} \cdots (z - z_k)^{a_k},$$

где $z_1, z_2, ..., z_k$ – некоторые различные комплексные числа, а $a_1, a_2, ..., a_k$ – натуральные числа, причем

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$$

(доказательство может быть произведено индукцией по *n*).

Отсюда следует, что числа $z_1, z_2, ..., z_k$ и только они являются корнями уравнения (12). При этом говорят, что z_1, является корнем кратности a_1, z_2 – корнем кратности a_2 и т.д.

Если условиться корень уравнения считать столько раз, какова его кратность, то можно сформулировать теорему: *каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней.*

Заметим, что если уравнение не является алгебраическим, то эта теорема, вообще говоря, неверна.

Рассмотрим уравнение

$$z^3 = \bar{z}. \qquad (13)$$

Это уравнение третьей степени не является алгебраическим уравнением. Домножая обе части уравнения на $\bar{z}$, получим

$$z^4 = \bar{z} \cdot z, \quad z^4 = |z|^2.$$

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z^4 = r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$ и, следовательно, получаем

$$r^4(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2.$$

Заметим, что уравнение имеет корень $z=0$ (т.е. $r=0$). Поэтому, сокращая на $r^2(r\neq 0)$, получаем

$$r^2(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = 1 = 1(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k).$$

Отсюда имеем $r=1,\quad \varphi = \dfrac{2\pi k}{4},\quad k=0,1,2,3.$

Таким образом, уравнение (13) имеет следующие пять корней:

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1 \text{ при } k=0,$$

$$z_3 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i \text{ при } k=1,$$

$$z_4 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1 \text{ при } k=2,$$

$$z_5 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i \text{ при } k=3.$$

И теорема Гаусса, и уточняющая ее только что сформулированная теорема полностью решают вопрос о существовании корней у произвольного алгебраического уравнения, но не дают метода отыскания этих корней. Если корень уравнения первой степени $a_1 z + a_0 = 0$ определяется формулой $z = -\dfrac{a_0}{a_1}$, если корень уравнения второй степени

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

всегда могут быть легко получены с помощью формулы (11), то в случае более высоких степеней дело обстоит иначе: для уравнений третьих и четвертых степеней аналогичные формулы настолько громоздки, что ими предпочитают не пользоваться, а для уравнений степени выше четвертой подобных формул в общем случае вообще не существует.

Отсутствие общего метода решения алгебраических уравнений не мешает, однако, в частных случаях отыскать все корни конкретного уравнения. Для решения уравнений *с целыми коэффициентами* (именно такие уравнения обычно встречаются в школьном курсе математики) часто оказывается полезной следующая теорема: *целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена*.

В самом деле, пусть $z=k$ – целый корень уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – целые числа. Тогда

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$

Отсюда получаем, что

$$a_n = -k(a_0 k^{n-1} + a_1 k^{n-2} + \dots + a_{n-1}),$$

то есть k – делитель числа a_n (число $a_0 k^{n-1} + a_1 k^{n-2} + \dots + a_{n-1}$ при сделанных предположениях является целым).

Пример 13. Решить уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0.$

Рассматривая делители свободного члена $\pm 1,\ \pm 5$, убеждаемся в том, что только $z=5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения $z-5$:

$$-\begin{array}{l|l} z^3 - 4z^2 - 4z - 5 & z-5 \\ \cline{2-2} z^3 - 5z^2 & z^2 + z + 1 \end{array}.$$

$$z^2-4z$$
$$z^2=5z$$
$$z-5$$
$$z-5$$
$$0$$

Таким образом, $z^3-4z^2-4z-5=(z-5)(z^2+z+1)=0.$

Решая квадратное уравнение $z^2+z+1=0$ (см. пример 10), получаем остальные корни. Итак,

$$z_1=5,\quad z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 14. Найти целые корни уравнения

$$2z^3-5z^2-2z+2=0.$$

Целыми корнями уравнения могут быть только $\pm1,\ \pm2.$ Подстановка в уравнение показывает, что ни одно из этих четырех чисел не удовлетворяет ему. Значит, это уравнение целых корней не имеет.

Пример 15. Решить уравнение

$$z^4-2z^3-12z^2+18z+27=0.$$

Проверяя делители свободного члена, получаем, что $z=-1$ есть корень уравнения. Разделив многочлен $z^4-2z^3-12z^2+18z+27$ на $z+1$, получим многочлен $z^3-9z-3z^2+27.$ Корнем уравнения $z^3-9z-3z^2+27=0$ является число $z=3.$ Разделив многочлен $z^3-9z-3z^2+27$ на $z-3$, получим $z^2-9.$ Таким образом, исходное уравнение может быть записано в виде

$$(z+1)(z-3)(z^2-9)=0,$$

т.е. имеет два однократных корня $z=-1, z=-3$ и один двукратный корень $z=3.$