§ 3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Запись комплексного числа z в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим другие формы записи комплексных чисел. Пусть r – модуль, а φ – какой-либо из аргументов комплексного числа $z = a + ib$, то есть $r = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = \arg(a+ib)$. Тогда из формулы (5) следует, что $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, и, значит,

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запись комплексного числа в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется ее *тригонометрической формой*.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа $a+bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и *один* из аргументов.

Пример 7. Записать число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Находим модуль

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Находим один из аргументов; так как $\operatorname{Re} z = \sqrt{3} > 0, \operatorname{Im} z = -1 < 0,$ то число $\sqrt{3} - i$ лежит в IV четверти. Поэтому надо найти такое решение уравнения $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, которое является углом в IV четверти, т.е. $\varphi = \dfrac{11\pi}{6}$.

Таким образом,

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

Пример 8. Найти сумму $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$, если

$|z_k| = r > 0,\ \arg z_k = \dfrac{2\pi k}{5},\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

$$\frac{1}{r}(z_1+z_2+z_3+z_4+z_5) = (\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} +$$

$$+\cos\frac{10\pi}{5}) + i\left(\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} + \sin\frac{10\pi}{5}\right) =$$

$$= \left(2\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{6\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right) + i\cdot 0 =$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{5}\cdot 2\cos\frac{5\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + 1 = -4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} + 1 =$$

$$= \frac{-4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} + 1 = \frac{-2\cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{-\sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}} = 0.$$

2. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$z_1 z_2 =$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\cdot(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)) =$$
$$= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (6)$$

Таким образом, *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения*.

Пусть $z_2 \neq 0,$ тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (7)$$

Таким образом, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного*.

3. Возведение в степень и извлечение корня. Формула (6) для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай *n* сомножителей. Используя метод математической индукции, нетрудно показать, что если $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ – аргументы чисел $z_1, z_2, ..., z_n$ соответственно, то

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \arg(z_1 z_2 ... z_n),$$
$$|z_1|\,|z_2| ... |z_n| = |z_1 z_2 ... z_n|.$$

Отсюда, как частный случай, получается формула, дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (8)$$

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени*.

Формула (8) называют *первой формулой Муавра*.

Пример 9. Найти z^{11}, если $z = 1 - i.$

Так как $|1 - i| = \sqrt{2},$ а одним из аргументов является $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ (см. пример 5), то

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно, применяя формулу (8), получим

$$z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right] = 2^{11/2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= 2^{11/2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\sqrt{2}^{10}(1+i) = -2^5(1+i).$$

Перейдем к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число z называется *корнем степени n,* $n\, n \in \mathbb{N}$ из числа ω (обозначается $\sqrt[n]{\omega}$), если $z^n = \omega.$

Таким образом, для того, чтобы извлечь корень степени *n,* $n \in \mathbb{N}$ из числа ω, достаточно решить уравнение $z^n = \omega.$

Если $\omega = 0,$ то при любом *n* уравнение $z^n = 0$ имеет одно и только одно решение $z = 0.$

Пусть теперь $\omega \neq 0.$ Представим z и ω в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \omega = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Тогда уравнение $z^n = \omega$ примет вид

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на число, кратное 2π. Следовательно,

$$r^n = r_0, \qquad n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

или

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \qquad \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, все решения уравнения $z^n = \omega$ даются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, (n-1). \qquad (9)$$

В самом деле, придавая числу k в формуле (9) целые значения, отличные от 0, 1, ..., (n-1), мы не получим других комплексных чисел. Например при $k = n$ получаем

$$z_n = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right) = \omega.$$

Формула (9) называется *второй формулой Муавра.*

Таким образом, если $\omega \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа ω: все они содержатся в формуле (9).

В частности, если $n = 2$, то уравнение $z^2 = \omega$ имеет два корня:

$$z_1 = \sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + i\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{2} + \pi\right)\right) = -z_1,$$

то есть эти корни симметричны относительно начала координат.

Также из формулы (9) нетрудно получить, что если $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ то точки, изображающие все корни уравнения $z^n = \omega$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z = 0$ и радиусом $\sqrt[n]{|\omega|}$.

Пример 10. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Запишем число $\omega = -8$ в тригонометрической форме:

$$\omega = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Применяя формулу (9), получаем

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k\right)\right), \ k = 0, 1, 2.$$

Следовательно,

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}i.$$

Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2, находятся в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z = 0$ (см. рис. 9).

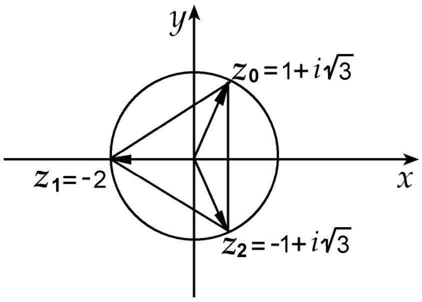

Рис. 9

Из сказанного выше видно, что символ $\sqrt[n]{\omega}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$, или одно, и, если одно, то какое именно.