

В элементарной математике изучаются действительные числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый натуральный ряд чисел  $1, 2, \dots, n, \dots$ . В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел.

Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются иррациональные и, наконец, комплексные числа.

## § 1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами

**1. Комплексные числа.** Комплексными числами называют выражения вида  $a + ib$ , где  $a$  и  $b$  – любые действительные числа,  $i$  – некоторый символ, для которых следующим образом вводятся понятия равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа  $a + ib$  и  $c + id$  равны тогда и только тогда, когда

$$a = c \quad \text{и} \quad b = d;$$

б) суммой чисел  $a + ib$  и  $c + id$  называется число

$$a + c + i(b + d);$$

в) произведением чисел  $a + ib$  и  $c + id$  называется число

$$ac - bd + i(ad + bc).$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производится согласно формулам:

$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d), \quad (1)$$

$$(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc). \quad (2)$$

Комплексные числа принято обозначать одной буквой (чаще всего буквой  $z$  или  $w$ ). Равенство  $z = a + ib$  означает, что комплексное число  $a + ib$  обозначено буквой  $z$ .

Действительное число  $a$  называется действительной частью комплексного числа  $z = a + ib$  и обозначается  $\operatorname{Re} z$ ; пишут  $\operatorname{Re} z = a$  или  $\operatorname{Re}(a + ib) = a$ . Число  $b$  называется мнимой частью числа  $z = a + ib$  и обозначается  $\operatorname{Im} z$ , пишут  $\operatorname{Im} z = b$  или  $\operatorname{Im}(a + ib) = b$ . Символ  $i$  называется мнимой единицей.

Заметим, что операции сложения и умножения над числами  $a + i0$  проводятся так же, как над действительными числами. В самом деле, на основании формул (1) и (2) имеем:

$$(a + i0) + (c + i0) = a + c + i0,$$

$$(a + i0)(c + i0) = (ac) + i0.$$

Таким образом, отождествив число  $a + i0$  с действительным числом  $a$ , получим, что каждое действительное число содержится во множестве комплексных чисел, а именно  $a = a + i0$ . В частности, число  $0 = 0 + i0$  будем, как обычно, называть нулем, а число  $1 = 1 + i0$  – единицей.

Числа  $0 + ib$  называют чисто мнимыми и обозначают  $ib$ :  $0 + i7 = 7i$ ,  $0 - i2 = -2i$ .

На основании формулы (2) найдем значение выражения  $i^2 = ii$ :

$$i^2 = ii = (0 + i1)(0 + i1) = -1 + i0 = -1.$$

Таким образом,

$$i^2 = -1. \quad (3)$$

Заметим, что формулу (2) запоминать не нужно, т.к. она получается автоматически, если перемножить двучлены  $a + ib$  и  $c + id$ , а затем на основании формулы (3) заменить  $i^2$  на  $-1$ .

**Пример 1.** Найти сумму и произведение комплексных чисел  $z_1 = 8 + 3i$  и  $z_2 = -5 + 2i$ . По формуле (1) находим

$$z_1 + z_2 = 8 - 5 + i(3 + 2) = 3 + 5i.$$

Формально перемножая двучлены  $(8 + 3i)$  и  $(-5 + 2i)$  и учитывая соотношение (3), имеем

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(-5 + 2i) = -40 - 15i + 16i + 6i^2 = -40 + i - 6 = -46 + i.$$

**2. Свойства операций над комплексными числами.** Операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения:*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

для любых комплексных чисел  $z_1, z_2$ .

2. *Ассоциативность сложения:*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

для любых комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3$ .

3.  $z + 0 = z$  для любого комплексного числа  $z$ .

4. Для любых комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  существует число  $z$  такое, что  $z_1 + z = z_2$ . Это число называется *разность* чисел  $z_2$  и  $z_1$  и обозначается  $z_2 - z_1$ .

5. *Коммутативность умножения:*

$$z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

для любых комплексных чисел  $z_1, z_2$ .

6. *Ассоциативность умножения:*

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3),$$

для любых комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3$ .

7. *Дистрибутивный закон*

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

для любых комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3$ .

8.  $1 \cdot z = z$  для любого комплексного числа  $z$ .

9. Для любых двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , где  $z_1 \neq 0$ , существует число  $z$  такое, что  $z_1 z = z_2$ . Это число называется *частным* комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  и обозначается  $\frac{z_2}{z_1}$ . Деление на 0 невозможно.

Все перечисленные свойства операций следуют из определения операций сложения и умножения (см. формулы (1) и (2)) и равенства комплексных чисел. Докажем свойство 9; остальные докажите самостоятельно.

Пусть  $z_1 = a + ib$ ,  $z_2 = c + id$ ,  $z_2 \neq 0$ , т.е. хотя бы одно из чисел  $c$  или  $d$  отлично от нуля,  $z = x + iy$ . Тогда равенство  $z z_1 = z_2$  запишется так:

$$a + ib = (x + iy)(c + id) = xc - yd + i(xd + yc).$$

Отсюда имеем, что  $x$  и  $y$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2},$$

то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (4)$$

**Пример 2.** Найти разность  $z_1 - z_2$  и частное  $\frac{z_1}{z_2}$  комплексных чисел

$$z_1 = 2 - 7i \text{ и } z_2 = -1 + 3i.$$

Находим разность

$$z_1 - z_2 = (2 - 7i) - (-1 + 3i) = (2 - (-1)) + i(-7 - 3) = 3 - 10i.$$

С помощью формулы (4) находим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(-1) + (-7)3}{1+9} + i \frac{-7(-1) - 2 \cdot 3}{1+9} = \frac{-23}{10} + \frac{1}{10}i.$$

В §2 будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Заметим, что понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяется; записи вида  $z > 3 + i$  и им подобные лишены всякого смысла.