

**Федеральное агентство по образованию
Московский физико – технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа**

МАТЕМАТИКА

**Показательные и логарифмические
уравнения, системы и неравенства**

Задание №5 для 11-х классов

(2004-2005 учебный год)



г. Долгопрудный, 2005

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 11-х классов (2004-2005 учебный год).
- М.: МФТИ, 2005, 31с.

Составитель:

Колесникова Софья Ильинична

Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 02.12.04

Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,93

Уч.-изд. л.1,72. Тираж 190000. Заказ №10-з.

Заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

***E.mail:* zftsh@pop3.mipt.ru**

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2005
© ЗФТШ при МФТИ, 2005
© Колесникова С.И, 2005

§1. Введение

Напомним основные свойства показательной и логарифмической функций.

В школе принимается без доказательства, что для любых положительных чисел a и b и любых действительных чисел α и β справедливы свойства:

$$C1. a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}. \quad C2. \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$$

$$C3. a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha. \quad C4. \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha.$$

Если $a > 0, a \neq 1$, то функция a^x отлична от постоянной. Ее называют показательной функцией с основанием a . Если $a > 1$, то функция a^x – монотонно возрастающая на R ; если $0 < a < 1$, то функция a^x – монотонно убывающая на R . Область значений показательной функции – множество R_+ всех положительных чисел. Отсюда и из монотонности следует, что, если $a > 0, a \neq 1$, то для любого положительного числа N существует единственное число x , такое, что $a^x = N$. Это число называется логарифмом числа N по основанию a и обозначается $\log_a N$. Из определения следует, что

$$a^{\log_a N} = N \text{ в ОДЗ}$$

Это равенство называется основным логарифмическим тождеством в ОДЗ (только для $N > 0, a > 0, a \neq 1$).

В школе показывается, что, если $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0, \alpha$ – любое действительное число, то верны формулы

$$C5. \log_a MN = \log_a M + \log_a N. \quad C6. \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

$$C7. \log_a M^\alpha = \alpha \log_a M.$$

$$C8. \text{Если, к тому же, } b > 0, b \neq 1, \text{ то } \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}.$$

Последняя формула позволяет переходить от логарифма по основанию a к логарифму по основанию b . Она называется формулой перехода к новому основанию.

Свойства 5 – 8 при вышеописанных условиях ($M > 0, N > 0$) являются тождествами и читаются как справа налево, так и слева направо.

Заметим, однако, что левые и правые части равенств в C5 и C6 имеют разные области определения: левая часть определена при $MN > 0$, а правая – при $M > 0, N > 0$. Это надо учитывать при решении задач: $MN > 0$ не только тогда, когда $M > 0, N > 0$, но и тогда, когда $M < 0, N < 0$. Учтем, что $MN = (-M)(-N)$, и для $-M > 0, -N > 0$ (в силу C5) $\log_a (-M)(-N) = \log_a (-M) + \log_a (-N)$. Теперь запишем более общую формулу

$$C5^*. \text{Если } MN > 0, \text{ то } \log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N|.$$

C9. Если $M \neq 0, N \neq 0$, то $\log_a |M| + \log_a |N| = \log_a |MN|$.

Аналогично показывается, что

C6*. Если $MN > 0$, то $\log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|$.

C10. Если $M \neq 0, N \neq 0$, то $\log_a |M| - \log_a |N| = \log_a \left| \frac{M}{N} \right|$.

C7*. Если $M \neq 0$, то для любого натурального n верно, что $\log_a M^{2n} = 2n \log_a |M|$.

Все свойства читаются в обе стороны (т. е. являются тождествами), при выполнении приведенных для каждого из них условий.

§2. Логарифмирование и потенцирование

При решении показательных и логарифмических уравнений особенно часто используются два преобразования: потенцирование и логарифмирование. Эти преобразования не являются равносильными. Логарифмированием уравнения $f(x) = g(x)$ по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называется переход к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. При этом область существования уравнения сужается, т. к. логарифмы существуют только у положительных чисел.

Например, $x^3 = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 1. \end{cases}$ а $\lg x^3 = \lg x \Leftrightarrow x = 1$. Уравнения не

равносильны, т. к. имеют разные множества решений.

Потенцированием называется переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$. При этом область определения расширяется, т. к. второе уравнение может существовать при любых $f(x), g(x)$, а первое – только при положительных. Поэтому запишем и запомним:

C11. Если $f(x) = g(x)$ и $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$, то $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

C12. Если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) > 0, g(x) > 0$ и $f(x) = g(x)$.

При решении логарифмического уравнения достаточно проверить положительность одной из функций, т. к. из последующего их равенства следует положительность и другой. Итак, из C11 и C12 следует условие равносильности

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad (\text{УР Л1})$$

§3. Показательные уравнения

Из монотонности показательной функции следует, что $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

Из свойств показательной функции следует, что, если $a > 0, a \neq 1$, то простейшее показательное уравнение $a^x = b$ при $b \leq 0$ не имеет решения, а при $b > 0$ имеет единственный корень $x = \log_a b$.

Для успешного решения большинства учебных примеров решающим является умение преобразовать исходное уравнение к более простому. Более простыми можно считать два основных уравнения:

1. $a^{f(x)} = b(x) \Leftrightarrow f(x) = \log_a b(x)$,
2. $g(a^{f(x)}) = 0$.

Уравнение 2 заменой переменных $a^{f(x)} = t$ сводится к уравнению $g(t) = 0$, у которого отыскиваются положительные корни, а затем решаются уравнения типа 1. Заметим, что

$$1^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow 1 = g(x), \quad 0^{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0; \\ \emptyset. \end{cases}$$

Пример 1. (МГУ, 1970). $4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

$$\begin{aligned} \diamond 4^{\sqrt{3x^2-2x+1}} + 2 &= 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2\sqrt{3x^2-2x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}} + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} \right)^2 - 9 \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} \right) + 2 &= 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2 \right) \left(2^{\sqrt{3x^2-2x}} - \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{1}{3}; \end{cases} \\ \sqrt{3x^2-2x} = -2 \Leftrightarrow \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $1, \frac{1}{3}$. \diamond

Пример 2. $8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} = 0$.

$$\begin{aligned} \diamond 8^x - 13 \cdot 4^x 3^x - 2^x 9^x + 13 \cdot 3^{3x} &= 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 13 \cdot 2^{2x} 3^x - 2^x 3^{2x} + 13 \cdot 3^{3x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{3x} \left(1 - 13 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^x - \left(\frac{3}{2} \right)^{2x} + 13 \left(\frac{3}{2} \right)^{3x} \right) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Пусть $\left(\frac{3}{2} \right)^x = t > 0$, тогда (*) примет вид $1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0$.

$$1 - 13t - t^2 + 13t^3 = 0 \Leftrightarrow (1 - t^2)(1 - 13t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1; \frac{1}{13} \Rightarrow x = 0; -\log_3 \frac{13}{2}$$

Ответ: $0, -\log_3 \frac{13}{2}$. \diamond

Пример 3. $500 \cdot 8^x = 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} \diamond 500 \cdot 8^x &= 8 \cdot 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 5^3 2^2 2^{3x} = 2^3 5^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2^{3x-1} = 5^{\frac{1}{x}-3} \Leftrightarrow (3x-1) \log_2 2 = \frac{1}{x} - 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\log_5 2 - 3 \pm (\log_5 2 + 3)}{6 \log_5 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x = -\log_2 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{3}, -\log_2 5$. \diamond

Пример 4. $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} = 5$. ♦ Это уравнение удается решить, используя

то, что левая часть уравнения является строго убывающей функцией, которая любое положительное значение принимает только один раз. Подбором убеждаемся, что $x = -1$.

Ответ: -1 . ♦

Пример 5. (МГУ, 1997, псих. ф – т.) При каких действительных p уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

$$\diamond 4^x + 4 \cdot 2^x + 7 + \frac{4}{2^x} + \frac{1}{4^x} - p = 0 \Leftrightarrow 4^{2x} + 4 \cdot 4^x \cdot 2^x + (7-p) \cdot 4^x + 4 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

Пусть $t = 2^x > 0$. Тогда уравнение примет вид

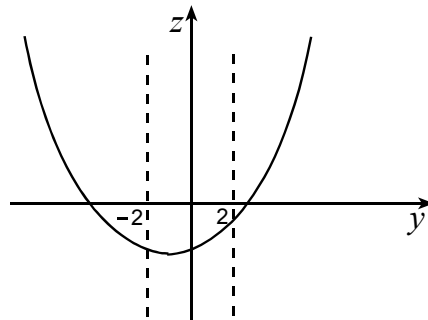
$$t^4 + 4t^3 + (7-p)t^2 + 4t + 1 = t^2 \left(t^2 + 4t + (7-p) + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2} \right) = 0.$$

Это возвратное уравнение. Оно решается заменой переменных $y = t + \frac{1}{t}$,

$$\text{причем } y = \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{(t-1)^2 + 2t}{t} = 2 + \frac{(t-1)^2}{t} \geq 2 \text{ для любого } t > 0.$$

Уравнение принимает вид

$$\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right) + 4 \left(t + \frac{1}{t} \right) + (5-p) = y^2 + 4y + (5-p) = 0.$$



Так как вершина параболы $z = y^2 + 4y + (5-p)$ расположена слева от оси z и ветви направлены вверх, то корень $y_0 \geq 2$ существует тогда и только тогда, когда $z(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 8 + 5 - p \leq 0 \Leftrightarrow p \geq 17$.

Ответ: $[17; +\infty)$ ♦

§4. Логарифмические уравнения

Логарифмические уравнения считаются сложными. Во-первых, потому, что у логарифма есть область определения. Во-вторых, подлогарифмические выражения могут быть любыми функциями, и надо помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат), и потеря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связано с ОДЗ логарифмов. Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае

сделать проверку. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он не может быть решением. Если же корень принадлежит ОДЗ, то надо подставить его в уравнение.

Основными типами логарифмических уравнений являются следующие уравнения. Для любых $a > 0, a \neq 1$

$$1. \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases} \quad (\text{УР Л1})$$

Из двух систем удобно выбирать ту, которая проще.

$$2. g(\log_a f(x)) = 0.$$

Пример 6. (МГУ, 1997, биофак) $\log_3 x + \log_3(x+1) = 1$.

$$\diamond \log_3 x + \log_3(x+1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \log_3 x(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x = 3. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{13} - 1}{2}. \diamond$$

Пример 7. (МГУ, 1998, ф – т почв.)

$$\diamond \log_{0,5} \left(\log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0.$$

$$\log_{0,5} \left(\log_4 \frac{1}{x} \right) + \log_4 (\log_2 (16x^2)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_2 \left(-\frac{\log_2 x}{2} \right) + \frac{\log_2 (4 + 2 \log_2 x)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ \log_2 (4 + 2 \log_2 x) = \log_2 \left(-\frac{\log_2 x}{2} \right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 0, \\ 4 + 2 \log_2 x = \frac{1}{4} \log_2^2 x \Leftrightarrow \log_2 x = 4 \pm 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2^{4-4\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ответ: } 2^{4-4\sqrt{2}}. \diamond$$

Пример 8. (МГУ, 1999, псих. ф – т) $x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0$.

$$\diamond x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_2 x})^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2 \log_7 x} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow (2^{\log_7 x})^2 + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_7 x} = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \log_7 x = \log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2} \Leftrightarrow x = 7^{\log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2}}.$$

$$\text{Ответ: } 7^{\log_2 \frac{\sqrt{41} - 5}{2}}. \diamond$$

Особняком стоят уравнения и неравенства, которые нельзя отнести ни к показательным, ни к логарифмическим. Они содержат функции вида $\log_{a(x)} f(x)$ и $(a(x))^{f(x)}$.

§5. Сложная экспонента. Уравнение вида $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим выражение $y(x) = a(x)^{f(x)}$. Что это за функция, какова ее область определения?

По определению, полагают, для любого $c > 0, c \neq 1, a(x) > 0$

$$\boxed{a(x)^{b(x)} = c^{b(x) \log_c a(x)}} \quad (01)$$

Рассмотрим уравнение $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

ОДЗ: $a(x) > 0$.

$$\begin{aligned} a(x)^{f(x)} &= 10^{f(x) \lg a(x)}, a(x)^{g(x)} = 10^{g(x) \lg a(x)}, \text{ тогда} \\ 10^{f(x) \lg a(x)} &= 10^{g(x) \lg a(x)} \Leftrightarrow f(x) \lg a(x) = g(x) \lg a(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lg a(x)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lg a(x) = 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \text{ Следовательно,} \end{aligned}$$

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \text{ в ОДЗ.}} \quad (\text{УР ПЗ})$$

или

$$\boxed{a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}} \quad (\text{УР ПЗ*})$$

Замечание. Мы не решаем уравнение $(-2)^x = -8$, потому что $(-2)^3 \neq (-2)^{\frac{12}{4}}$, где левая часть существует, а правая часть не определена (в уравнении нет ограничений для x , и оно может принимать рациональные значения!). Однако, мы решаем уравнение $(-2)^n = -8$, где *заранее* задано, что n – число целое (операции возведения в рациональную степень и натуральную степень разные! Вспомним, кстати, что $\sqrt[3]{-8} \neq (-8)^{\frac{1}{3}}$, т. к. левая часть существует, а правая – нет).

Пример 9. Решите уравнение $x^{x^2} = x^{-2-3x}$.

♦ ОДЗ: $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{В ОДЗ } x^{x^2} &= x^{-2-3x} \Leftrightarrow 10^{x^2 \lg x} = 10^{(-2-3x) \lg x} \Leftrightarrow \lg x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lg x(x+2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Корни $-1, -2$ *не входят в ОДЗ*. Это, несмотря на то, что $(-1)^1 = (-1)^1, (-2)^4 = (-2)^4$.

Ответ: $\{1\}$. ♦

Пример 10. (МГУ, 1998, химфак.) При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x + \left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x = 2(\sqrt{2})^x \text{ им}$$

еет единственное решение?

♦ Сначала упростим левую часть уравнения. Замечаем, что

$$\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} - \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x = \frac{2^x}{\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x}. \text{ Пусть}$$

$t = \left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x$, тогда уравнение примет вид:

$$t + \frac{2^x}{t} = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow t^2 - 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \cdot t + 2^x = \left(t - 2^{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right)^x = 2^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \text{В силу (УР П4),}$$

$$x \lg\left(\sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6}\right) = x \lg \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} = \sqrt{2}. \end{cases} \quad (*)$$

Мы видим, что при любом значении параметра a есть решение $x = 0$, поэтому для единственности решения уравнения необходимо и достаточно, чтобы второе уравнение совокупности не имело решений.

$$\text{ОДЗ } (*): x^2 - 3ax + 6 \geq 0.$$

$$\text{Если } x^2 - 3ax + 6 > 0, \text{ то } \sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} > \sqrt{2}.$$

$$\text{Если } x^2 - 3ax + 6 = 0, \text{ то } \sqrt{x^2 - 3ax + 8} + \sqrt{x^2 - 3ax + 6} = \sqrt{2}.$$

Заданное уравнение имеет единственное решение ($x = 0$ является решением данного уравнения при любом a !), если уравнение $x^2 - 3ax + 6 = 0$ не имеет решений, что имеет место тогда и только тогда,

$$\text{когда } 9a^2 - 24 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right). \blacklozenge$$

§6. Логарифмы с переменным основанием.

Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$

Рассмотрим выражение $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$.

По определению, для любого $c > 0, c \neq 1$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}} \quad (02)$$

т. е. $y(x)$ – это частное двух логарифмов, и областью определения (ОДЗ) является множество X , на котором

$$\underline{f(x) > 0, a(x) > 0, a(x) \neq 1.}$$

Рассмотрим уравнение $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$.

$$\text{ОДЗ: } a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$$

Воспользуемся определением (02) и получим в ОДЗ

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)} = \frac{\lg g(x)}{\lg a(x)} \Leftrightarrow \lg f(x) = \lg g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x). *$$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ в ОДЗ.}} \quad (\text{УР ЛЗ})$$

Можно записать полное условие равносильности

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}} \quad (\text{УР ЛЗ*})$$

Пример 11. (МФТИ, 1981) Решите уравнение

$$2 \log_x (4 + \sqrt{x}) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2.$$

$$\diamond \quad 2 \log_x (4 + \sqrt{x}) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2 \Leftrightarrow \log_x (4 + \sqrt{x}) = 1 - \log_x 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x (4 + \sqrt{x}) = \log_x \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 8 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Ответ: 16. \diamond

Метод интервалов для логарифмических и показательных неравенств.

В курсе математического анализа для 10-го класса доказывается теорема:

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и не обращается в 0 на открытом промежутке $(a; b)$, то $f(x)$ имеет один и тот же знак во всех внутренних точках отрезка $[a; b]$.

Это и есть основание для метода интервалов для непрерывной функции: найти нули $f(x)$ и определить знаки $f(x)$ на промежутках между соседними нулями, вычислив значения в пробных точках.

§7. Показательные неравенства

Рассмотрим неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на некотором промежутке X , где задано число $a > 0$. Тогда $a^{f(x)}, a^{g(x)}$ – тоже непрерывны на X и к неравенству $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ применим метод интервалов. Его решение зависит от того, $a > 1$ или $a < 1$.

1) Если $a > 1$, то $f(x) > g(x)$ и $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$.

2) Если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$ и опять $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$. Верно и обратное:

1. если $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$, то при $a > 1$ имеем $f(x) > g(x)$ и $a^{f(x)} > a^{g(x)}$;

2. если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$ и опять $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Таким образом, мы вывели условие равносильности

$$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0} \quad (\text{УР П1})$$

При рассмотрении неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ меняется знак неравенства в (УР П1), и мы видим, что

$$\boxed{\text{знак разности } a^{f(x)} - a^{g(x)} \text{ совпадает со знаком произведения } (a-1)(f(x)-g(x))} \quad (\text{УР П2})$$

Пример 12. (МГУ, 1999, ф – т почв.) Решите неравенство

$$3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}.$$

$$\blacklozenge 3 \cdot 2^{2\sqrt{2-x}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}} + 3 < 0 \Leftrightarrow (2^{\sqrt{2-x}} - 3) \left(2^{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{3} \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2-x}} - 3 < 0 \Leftrightarrow 0 < 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2-x} < \log_2 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2-x < \log_2^2 3 \Leftrightarrow 2 - \log_2^2 3 < x \leq 2.$$

Ответ: $(2 - \log_2^2 3; 2]$. \blacklozenge

Пример 13. (МГУ, 1999, мехмат.) Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$$

$$\blacklozenge 3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3} \Leftrightarrow 3^{x^2+6x+9} + 3^{-2} \leq 3^{x^2-2} + 3^{6x+9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2} (3^{6x+9} - 3^{-2}) - (3^{6x+9} - 3^{-2}) \leq 0 \Leftrightarrow (3^{x^2} - 3^0) (3^{6x+9} - 3^{-2}) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{В силу (УР П2), } x^2(6x+9+2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \leq -\frac{11}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{11}{6}\right] \cup \{0\}$. \blacklozenge

Пример 14. Решите неравенство $\frac{x^2+x-2}{(3^x-1)(2^{x^2}-16)} \geq 0$.

$$\blacklozenge \frac{x^2+x-2}{(3^x-1)(2^{x^2}-16)} \geq 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-0)(x^2-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2, \\ \frac{x-1}{x(x-2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;1] \cup (2;+\infty).$$

Ответ: $(0;1] \cup (2;+\infty)$. \blacklozenge

Пример 15. (МГУ, 2000, почв.) Решите неравенство $2^{x^2} \cdot 3^x < 6$.

$$\blacklozenge 2^{x^2} \cdot 3^x < 6 \Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{x \log_2 3} < 2^{\log_2 6} \Leftrightarrow 2^{x^2+x \log_2 3} < 2^{\log_2 6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \log_2 3 - \log_2 6 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+\log_2 6) < 0 \Leftrightarrow -\log_2 6 < x < 1. \text{ **Отв}**$$

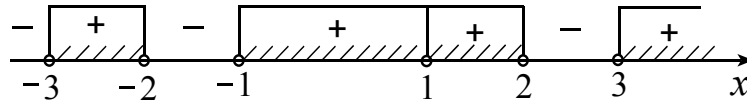
ет: $(-\log_2 6; 1)$. \blacklozenge

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{(3^{x^2} - 3)(2^{-x} - 2^3)(4^x - 4^{x^2+2x-2})}{(x^2 - 5x + 6)} > 0.$$

$$\diamond \frac{(3^{x^2} - 3)(2^{-x} - 2^3)(4^x - 4^{x^2+2x-2})}{(x^2 - 5x + 6)} > 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x^2 - 1)(-x - 3)(x - x^2 - 2x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2(x + 1)(x + 3)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} > 0 \Leftrightarrow$$



С рисунка снимаем

Ответ: $(-3; -2) \cup (-1; 1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$. \diamond

Пример 17. (МГУ, 1973, биофак) Найти все значения параметра a , для каждого из которых неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

\diamond Пусть $2^x = t > 0$, тогда неравенство примет вид $t^2 - at - a + 3 \leq 0$. Прежде всего, неравенство имеет решение, если дискриминант неотрицателен, т. е.

$$D = a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a - 2) \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty).$$

$$\text{При этом, } t^2 - at - a + 3 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{a - \sqrt{D}}{2} = t_1; \frac{a + \sqrt{D}}{2} = t_2 \right].$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a , при которых неравенство верно хотя бы при одном положительном значении t . Для этого необходимо и достаточно, чтобы больший корень был положительным, т. е.

$$t_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a^2 + 4a - 12 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 2;$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 + 4a - 12 - a^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset;$$

$$\Leftrightarrow a \geq 2 \Rightarrow$$

Ответ: $[2; +\infty)$. \diamond

§8. Неравенства вида $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$

Рассмотрим неравенство $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}$, где $a(x), f(x), g(x)$ – непрерывные функции. ОДЗ: $a(x) > 0$.

Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве c число e (можно взять любое другое допустимое число). Неравенство принимает вид $e^{f(x) \ln a(x)} > e^{g(x) \ln a(x)}$. Используя (УР П1), получим равносильное неравенство в ОДЗ

$$(e - 1)(f(x) \ln a(x) - g(x) \ln a(x)) = (e - 1)(f(x) - g(x)) \ln a(x) > 0,$$

а, используя (УР Л5), найдем окончательное равносильное неравенство $(a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0$.

Итак, мы вывели еще одно условие равносильности

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0} \text{ в ОДЗ. (УР П5)}$$

или полное условие равносильности для строгого неравенства

$$\boxed{a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0. \end{cases}} \text{ (УР П5*)}$$

Поэтому

$$\boxed{\text{знак разности } a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \text{ совпадает со знаком произведения } (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ.}} \text{ (УР П6)}$$

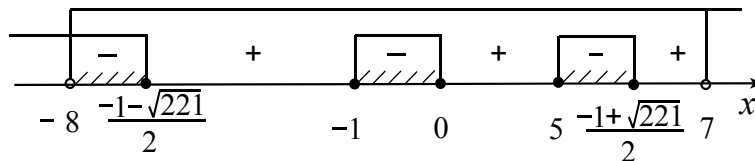
Преимущество (УР П6) состоит в том, что, если $a(x), f(x), g(x)$ – рациональные функции, то за **ОДИН ШАГ** мы перешли к классическому варианту метода интервалов.

Пример 18. Решите неравенство

$$(56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x}.$$

♦ ОДЗ: $56 - x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 56 < 0 \Leftrightarrow x \in (-8; 7)$.

$$\begin{aligned} \text{В ОДЗ, в силу (УР П5**), } & (56 - x - x^2)^{x^3 - 2x^2} \geq (56 - x - x^2)^{2x^2 + 5x} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (56 - x - x^2)(x^3 - 2x^2 - 2x^2 - 5x) \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(x - \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right) \left(x - \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right) x(x+1)(x-4) \leq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$



Ответ: $\left[-8; \frac{-1 - \sqrt{221}}{2}\right] \cup [-1; 0] \cup \left[5; \frac{-1 + \sqrt{221}}{2}\right]$. ♦

§9. Логарифмические неравенства. Неравенства вида

$$\log_a f(x) > 0 \text{ и } \log_a f(x) > \log_a g(x)$$

Пусть $f(x) > 0, f(x)$ непрерывна на $(a; b)$, тогда $\log_a f(x)$ тоже непрерывен на $(a; b)$, и для решения неравенства $\log_a f(x) > 0$ применим метод интервалов. При решении этого неравенства значения $f(x)$ в “пробных” точках придется сравнивать с единицей. Если “пробные” точки не очень удобные, то вычисления могут оказаться довольно громоздкими. Поэтому с самого начала учтем это.

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > 0 (< 0)$, где a – заданное положительное число, $a \neq 1$.

ОДЗ: $f(x) > 0$.

Покажем, что имеет место условие равносильности

$$\log_a f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0) \text{ в ОДЗ} \quad (\text{УР Л4})$$

Действительно,

1. Если $a > 1$, то $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ тогда и только тогда, когда $f(x) > 1 (< 1)$, т. е. $(a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0)$.

2. Если $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ тогда и только тогда, когда $f(x) < 1 (> 1)$, т. е. опять $(a-1)(f(x)-1) < 0 (> 0)$. И, наоборот.

Если $(a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0)$, то

1. при $a > 1$ имеем $f(x) > 1 (< 1)$, а тогда $\log_a f(x) > 0 (< 0)$,

2. при $0 < a < 1$ имеем $f(x) < 1 (> 1)$, а тогда $\log_a f(x) > 0 (< 0)$.

Отсюда еще следует, что

$$\text{знак } \log_a f(x) \text{ совпадает со знаком произведения } (a-1)(f(x)-1) \text{ в ОДЗ} \quad (\text{УР Л5})$$

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ:

$$\log_a f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-1) > 0 (< 0). \end{cases} \quad (\text{УР Л4*})$$

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0, a \neq 1$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что верно и такое условие равносильности

$$\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0 (< 0) \text{ в ОДЗ} \quad (\text{УР Л6})$$

а также полное условие равносильности

$$\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a-1)(f(x)-g(x)) > 0 (< 0). \end{cases} \quad (\text{УР Л6*})$$

Отсюда следует, что

$$\text{знак разности } \log_a f(x) - \log_a g(x) \text{ совпадает со знаком произведения } (a-1)(f(x)-g(x)) \text{ в ОДЗ} \quad (\text{УР Л7})$$

При решении простейших логарифмических неравенств, конечно, можно не использовать (УР Л4) и (УР Л6). Однако, (УР Л4) и (УР Л6) дают возможность просто справиться с неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.

Пример 19. Решите неравенство

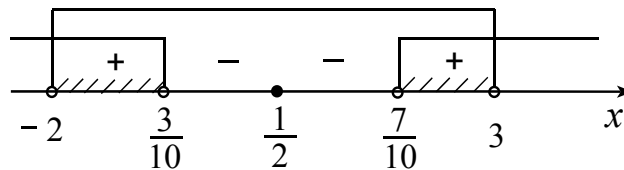
$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(6 + x - x^2)}{(10x - 7)(10x - 3)} \geq 0.$$

$$\diamond \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 3x^2 - 3x + 7 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, \\ -x^2 + x + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 3). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, 3).$$

$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(-x^2 + x + 6)}{(10x - 7)(10x - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow \text{В ОДЗ, в силу (УР Л7),}$$

$$\frac{3x^2 - 3x + 7 + x^2 - x - 6}{\left(x - \frac{7}{10}\right)\left(x - \frac{3}{10}\right)} = \frac{(2x - 1)^2}{\left(x - \frac{3}{10}\right)\left(x - \frac{7}{10}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; +\infty\right) \Rightarrow x \in \left(-2; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; 3\right) \Rightarrow$$



$$\text{Ответ: } \left(-2; \frac{3}{10}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{7}{10}; 3\right).$$

В этом примере разность логарифмов *не меняет* знак при переходе через точку $x = \frac{1}{2}$, а следующие нули находятся близко. “Пробные” точки подставлять затруднительно. \diamond

Пример 20. (МГУ, 1998, мех – мат.) Решите неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \cdot \log_3(-2x - x^2) \geq \log_3\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \log_2(-2x - x^2).$$

$$\diamond \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x + 5,5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5,5; \\ \sqrt{x + 5,5} + \frac{x + 2}{2} > 0, \\ -2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(x + 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0). \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0).$$

$$\log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \log_3(-2x - x^2) \geq \log_3\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \log_2(-2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) \log_2(-2x - x^2) \geq \log_2\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \log_2(-2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(-2x - x^2) \left(\log_2\left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1\right) - \log_2\left(\frac{|x|}{2} + \frac{3}{2}\right) \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

В ОДЗ, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

$$(-2x - x^2 - 1) \left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + \frac{x}{2} + 1 - \frac{|x|}{2} - \frac{3}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

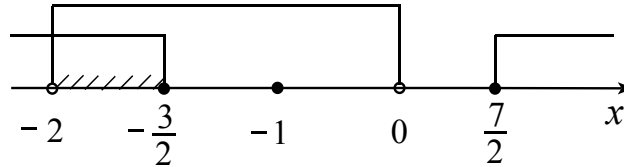
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} + x - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad (|x| = -x \text{ в ОДЗ}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left(\sqrt{x + \frac{11}{2}} - \left(\frac{1}{2} - x \right) \right) \leq 0 \Leftrightarrow \text{Т. к. } \left(\frac{1}{2} - x \right) > 0 \text{ в ОДЗ}$$

$$(x+1)^2 \left(x + \frac{11}{2} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \left(-x^2 + 2x + \frac{21}{4} \right) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \left(x - \frac{7}{2} \right) \left(x + \frac{3}{2} \right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(\left(-\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty \right) \cup \{-1\} \right) \cap \text{ОДЗ. Учтываем ОДЗ:}$$



Получаем

Ответ: $\left(-2; -\frac{3}{2} \right] \cup \{-1\}$. ♦

Пример 21. (МФТИ, 1992) $\frac{1}{x} \log_7 \left(\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > 1$.

♦ ОДЗ: $\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot 7^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \log_7 \frac{4}{9}$.

Тогда в ОДЗ $\frac{1}{x} \log_7 \left(\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \log_7 \left(\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) > \frac{x}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_7 \left(\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) - x}{x} \equiv \frac{\log_7 \left(\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} \right) - \log_7 7^x}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

\Leftrightarrow В ОДЗ, в силу (УР Л7),

$$\frac{\frac{9}{2} - 2 \cdot 7^{-x} - 7^x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{7^{2x} - \frac{9}{2} \cdot 7^x + 2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(7^x - 4) \left(7^x - \frac{1}{2} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(7^x - 7^{\log_7 4}) \left(7^x - 7^{\log_7 \frac{1}{2}} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x - \log_7 4) \left(x - \log_7 \frac{1}{2} \right)}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4) \Rightarrow$$

\Rightarrow С учётом ОДЗ, $x \in \left(\log_7 \frac{4}{9}; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4)$.

Ответ: $\left(\log_7 \frac{4}{9}; \log_7 \frac{1}{2} \right) \cup (0; \log_7 4)$. ♦

§10. Неравенства для логарифмов с переменным основанием

Рассмотрим неравенство $\log_{a(x)} f(x) > 0$, где $a(x), f(x)$ непрерывны на промежутке X .

ОДЗ: $a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0$. Оказывается, что и в этом случае

знак функции $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - 1)$ в ОДЗ	(УР Л9)
---	---------

и имеет место условие равносильности

$\log_{a(x)} f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow (a(x) - 1)(f(x) - 1) > 0 (< 0)$ в ОДЗ.	(УР Л10)
--	----------

Можно записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$\log_{a(x)} f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - 1) > 0 (< 0). \end{cases}$	(УР Л10*)
--	-----------

Для нестрогого неравенства это условие выглядит по-другому.

$\log_{a(x)} f(x) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - 1) \geq 0 (\leq 0). \end{cases}$	(УР Л11)
--	----------

Действительно, по определению, $\log_{a(x)} f(x) = \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$,

$a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0$.

В силу предыдущего условия равносильности (УР Л5), знаки $\lg f(x), \lg a(x)$ совпадают со знаками разностей $f(x) - 1$ и $a(x) - 1$

соответственно. Поэтому знак $\frac{\lg f(x)}{\lg a(x)}$ совпадает со знаком частного

$\frac{f(x) - 1}{a(x) - 1}$, или со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - 1)$.

Рассмотрим неравенство $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$, где $a(x), f(x), g(x)$ непрерывные функции и $a(x) > 0, a(x) \neq 1$.

По определению, $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) = \frac{\lg f(x) - \lg g(x)}{\lg a(x)}$, и, в силу (УР Л5) и (УР Л7),

знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ.	(УР Л12)
---	----------

Из полученного условия равносильности следует, что

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) > (<) \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{в} \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0 (< 0) \end{matrix} \quad \text{ОДЗ.}} \quad (\text{УР Л13})$$

Заметим, что из (УР Л12) автоматически следует, что $a(x) \neq 1$, поэтому при решении **строгих неравенств** условие $a(x) \neq 1$ в ОДЗ можно **опустить** и так записать полное условие равносильности, включающее ОДЗ.

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) < 0. \end{cases}} \quad (\text{УР Л13*})$$

Преимущество и красота приведенных условий равносильности состоит в том, что мы за один шаг освободились от логарифмов и переменных оснований. Теперь, если основание логарифма и подлогарифмическое выражение являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

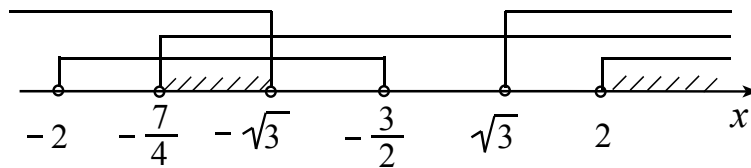
Заметим, что все условия равносильности **формально** точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

Пример 22. (МФТИ, 1980) Решите неравенство $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$.

♦ В силу (УР Л15), $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+7 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4}, \\ x^2-3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty), \\ (x^2-3-1)(4x+7-1) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty).$$



Ответ: $\left(-\frac{7}{4}; -\sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty)$. ♦

Но, как показывает практика, не всегда этим удобно пользоваться полными условиями равносильности. Это происходит, если входящие в условия равносильности неравенства громоздки. Тогда удобно отделить нахождение ОДЗ от решения основного неравенства, как мы часто и будем делать.

Пример 23. (МФТИ, 1994). Решите неравенство

$$\log_8 \left(\frac{1}{3} - x \right) \log_{\left| 2x + \frac{1}{3} \right|} \left(\frac{1}{3} - x \right) > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} - x \right)}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3} \right)^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} - x > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \\ 2x + \frac{1}{3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{6}. \\ 2x + \frac{1}{3} \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pm 3 - 1}{6} \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}. \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 \diamond \text{ ОДЗ. } & \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right). \\
 & \Leftrightarrow \log_8 \left(\frac{1}{3} - x\right) \log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2 \frac{\left(\frac{1}{3} - x\right)}{\sqrt[3]{\left(2x + \frac{1}{3}\right)^2}} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_2 \left(\frac{1}{3} - x\right) \log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(\frac{1}{3} - x\right) > \log_2 \left(\frac{1}{3} - x\right) - \frac{2}{3} \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right| \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right| \left(\log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|}^2 \left(\frac{1}{3} - x\right) - 3 \log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(\frac{1}{3} - x\right) + 2 \right) > 0 \Leftrightarrow \\
 & \text{(т. к. } t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)\text{)} \\
 & \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right| \left(\log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(\frac{1}{3} - x\right) - 1 \right) \left(\log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(\frac{1}{3} - x\right) - 2 \right) > 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \log_2 \left|2x + \frac{1}{3}\right| \left(\log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(\frac{1}{3} - x\right) - \log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left|2x + \frac{1}{3}\right| \right) \left(\log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(\frac{1}{3} - x\right) - \right. \\
 & \left. - \log_{\left|2x + \frac{1}{3}\right|} \left(2x + \frac{1}{3}\right) \right) > 0 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

В ОДЗ, в силу (УР Л12),

$$\left(\left|2x + \frac{1}{3}\right| - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - x - \left|2x + \frac{1}{3}\right| \right) \left(\frac{1}{3} - x - 4x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{9} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

(т. к. в ОДЗ $\frac{1}{3} - x > 0$)

$$\Leftrightarrow \left(\left|2x + \frac{1}{3}\right| - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - x - \left|2x + \frac{1}{3}\right| \right) (36x^2 + 21x - 2) < 0 \Leftrightarrow$$

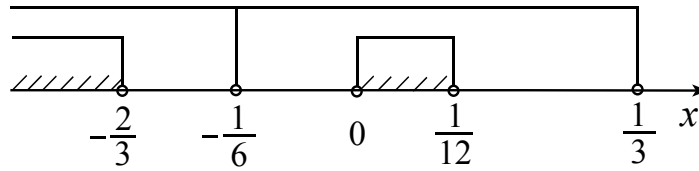
В силу (УР М5),

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \left(2x + \frac{1}{3} - 1\right) \left(2x + \frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{3} - x - 2x - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} - x + 2x + \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{1}{12}\right) \cdot \\
 & \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)^3\left(x - \frac{1}{12}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Учтем ОДЗ



и

получаем

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right)$. ♦

Пример 24. (МФТИ, 1996). Решите неравенство

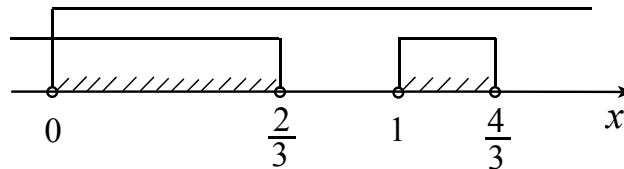
$$\log_{|3x-3|}(25^x - 9^x) < \log_{|3x-3|}(5^x + 3^x) + \log_{|3x-3|}(5^{x-1} + 3^{x-1}).$$

♦ $\log_{|3x-3|}(5^x + 3^x)(5^x - 3^x) < \log_{|3x-3|}(5^x + 3^x) + \log_{|3x-3|}(5^{x-1} + 3^{x-1}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x-3| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, \\ 5^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left((|3x-3|-1)(5^x - 3^x - 5^{x-1} - 3^{x-1}) < 0 \Leftrightarrow (|3x-3|-1)\left(\frac{4}{5}5^x - \frac{4}{3}3^x\right) < 0.$$

В силу (УР М5) и (УР П6),



$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(3x-4\right)\left(3x-2\right)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{5}{3}\right)^0\right) < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1) < 0$$

Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right)$.

Контрольные вопросы

Решите уравнения 1-5

1(3). (МГУ, 1998, почв.) $\log_{0,5}\left(\log_4 \frac{1}{x}\right) + \log_4(\log_2(16x^2)) = 0.$

2(3). (МГУ, 2000, химфак)

$$(26 + 15\sqrt{3})^x - 5(7 + 4\sqrt{3})^x + 6(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 5.$$

3(3). $(x^2 - 3x + 2)^{2x^2 - 6x + 2} = (x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 7x + 3}$.

4(3). $(4x^2 + 4x - 3)^{\left(x - \frac{1}{2}\right)2x + 2} = (4x^2 + 4x - 3)^{4\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) + 1}$.

5(3). (МГУ, 2003, ф-т наук о материалах)

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(1 + (x^2 - 3x + 2)^2\right) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}.$$

Решите неравенства 6-14

6(3). $\left|2^{2t} + 5 \cdot 2^t - 18\right| - 2^{2t} \geq 18 - 2^t$.

7(3).
$$\frac{\left(2^{x^2-1} - 1\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+4} - \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-7}\right)(9x^2 - 3x - 2)(x - 11)^2}{\left(3^{x+1} - 3^{-5x-4}\right)\left(4^{3x^2-5x} - 4^{-x-1}\right)} \geq 0.$$

8(4). (МГУ, 2003, мехмат)

$$\frac{1}{|7 - \log_3 3x|} + \frac{1}{|4 - \log_9 9x^2|} \leq \frac{1}{|\log_9 81x|}.$$

9(3).
$$\frac{(4x + 25)(4x + 27)\log_{3-\sqrt{5}}(77 - 4x - x^2)}{(2^{x^2-2x} - 2^{x+4})} \geq 0.$$

10(3).
$$\frac{\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(6 + x - x^2)}{(10x - 7)(10x - 3)} \geq 0.$$

11(2).
$$\frac{\log_3(1 - 2x - x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x + 1 + \sqrt{2})} \geq 0.$$

12(3). (МГУ, 1998, экон. ф-т)
$$\frac{\log_7(19 - 16x|x|) - \log_{49}(1 - 4x)^2}{3 - 4x - |4x - 3|} \leq 0.$$

13(3).
$$\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)^{4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) + 1} \leq \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)^{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) + 3}.$$

14(3).
$$\frac{\log_{x+10}(x^2 - 2x - 1)}{\log_{23-x}(x^2 - 2x + 0,25)} \geq 0.$$

Задачи

Решите неравенства 1-9

1(3).
$$\frac{\log_{(20x-x^2-28)}(22x - x^2 - 46)}{(2x^2 - 41x + 90)} < 0.$$

2(3). (МГУ, 2003, химфак)

$$x \log_3 x + 1 \geq \log_3 x \cdot \log_2 3 + x \log_3 2.$$

3(3). (МГУ, 2003, химфак)

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2 - |x - 1|) > \log_{\sqrt{10}}(2x - x^2).$$

4(3). $(x^2 - 10x + 23)(2^{x^2-9} - 2^{7x^2-15x}) \log_{\log_2 \frac{x}{2}}(x^2 - 10x + 22) \geq 0$.

5(4). (МГУ, 1994, мехмат)

$$\log_{7x-4} 3 + \frac{1}{\log_2(7x-4)} \geq \frac{1}{\log_6(9x^2 - 2x - 2)}$$

6(3). (МГУ, 2003, биофак)

$$(3-x) \log_2(1 + \sqrt{7})^{x^2+3x+2} > \sqrt{2-x} \log_3(8 + 2\sqrt{7})^{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

7(3). (МГУ, 1973, ВМК) $\log_{\frac{x^2-18x+91}{90}} \left(5x - \frac{3}{10}\right) \leq 0$.

8(3). (МГУ, 2003, ф-т почвоведения)

$$\log_{-4x^2+12x-8} |4x-5| > 0$$

9(5). (МФТИ, 2004)

$$\frac{\log_{x^2} 9}{\sqrt{\frac{1}{2} + \log_{x^2}(x+1)} - \sqrt{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\log_3(x+1) - \log_9 x^4}$$

10(5). (МГУ, 2003, мехмат) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\log_x \frac{x-a}{1-ax} + \log_{x+1} \frac{x-a+1}{1-ax-a} \geq 0$$

имеет хотя бы три целочисленных решения.

11(4). (МГУ, 1997, псих. ф-т.) При каких действительных p уравнение $4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$ имеет решение?

12(3). При каких a существует положительное решение неравенства

$$2 > |3^t + a| + 3^{2t}?$$

13(4). Решите неравенство $\log_x(x-a) > 2$ при всех a .

14(4). Решите неравенство $\log_{3x-x^2}(3a-ax) < 1$ при всех a .