

§7. Показательные неравенства

Рассмотрим неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на некотором промежутке X , где задано число $a > 0$. Тогда $a^{f(x)}, a^{g(x)}$ – тоже непрерывны на X и к неравенству $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ применим метод интервалов. Его решение зависит от того, $a > 1$ или $a < 1$.

1) Если $a > 1$, то $f(x) > g(x)$ и $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$.

2) Если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$ и опять $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$. Верно и обратное:

1. если $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$, то при $a > 1$ имеем $f(x) > g(x)$ и $a^{f(x)} > a^{g(x)}$;

2. если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$ и опять $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Таким образом, мы вывели условие равносильности

$$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0} \quad (\text{УР П1})$$

При рассмотрении неравенства $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ меняется знак неравенства в (УР П1), и мы видим, что

$$\boxed{\text{знак разности } a^{f(x)} - a^{g(x)} \text{ совпадает со знаком произведения } (a-1)(f(x)-g(x))} \quad (\text{УР П2})$$

Пример 12. (МГУ, 1999, ф – т почв.) Решите неравенство $3 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}}$.

$$\begin{aligned} \diamond 3 \cdot 2^{2\sqrt{2-x}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{2-x}} + 3 < 0 &\Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{2-x}} - 3\right) \left(2^{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{\sqrt{2-x}} - 3 < 0 \Leftrightarrow 0 < 2^{\sqrt{2-x}} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{2-x} < \log_2 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2-x < \log_2^2 3 \Leftrightarrow 2 - \log_2^2 3 < x \leq 2. \end{aligned}$$

Ответ: $(2 - \log_2^2 3; 2]$. \diamond

Пример 13. (МГУ, 1999, мехмат.). Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3}.$$

$$\begin{aligned} \diamond 3^{(x+3)^2} + \frac{1}{9} \leq 3^{x^2-2} + 27^{2x+3} &\Leftrightarrow 3^{x^2+6x+9} + 3^{-2} \leq 3^{x^2-2} + 3^{6x+9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{x^2} (3^{6x+9} - 3^{-2}) - (3^{6x+9} - 3^{-2}) \leq 0 \Leftrightarrow (3^{x^2} - 3^0) (3^{6x+9} - 3^{-2}) \leq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\text{В силу (УР П2), } x^2(6x+9+2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \leq -\frac{11}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{11}{6}\right] \cup \{0\}$. \diamond

Пример 14. Решите неравенство $\frac{x^2 + x - 2}{(3^x - 1)(2^{x^2} - 16)} \geq 0$.

$$\diamond \frac{x^2 + x - 2}{(3^x - 1)(2^{x^2} - 16)} \geq 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-0)(x^2-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2, \\ \frac{x-1}{x(x-2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;1] \cup (2;+\infty).$$

Ответ: $(0;1] \cup (2;+\infty)$. \diamond

Пример 15. (МГУ, 2000, почв.) Решите неравенство $2^{x^2} \cdot 3^x < 6$.

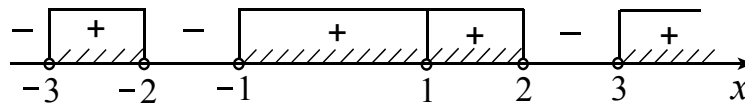
$$\diamond 2^{x^2} \cdot 3^x < 6 \Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{x \log_2 3} < 2^{\log_2 6} \Leftrightarrow 2^{x^2 + x \log_2 3} < 2^{\log_2 6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + x \log_2 3 - \log_2 6 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x + \log_2 6) < 0 \Leftrightarrow -\log_2 6 < x < 1. \text{ Ответ: } (-\log_2 6; 1). \diamond$$

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{(3^{x^2} - 3)(2^{-x} - 2^3)(4^x - 4^{x^2+2x-2})}{(x^2 - 5x + 6)} > 0.$$

$$\diamond \frac{(3^{x^2} - 3)(2^{-x} - 2^3)(4^x - 4^{x^2+2x-2})}{(x^2 - 5x + 6)} > 0 \Leftrightarrow \text{В силу (УР П2),}$$

$$\frac{(x^2 - 1)(-x - 3)(x - x^2 - 2x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2(x + 1)(x + 3)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} > 0 \Leftrightarrow$$



С рисунка снимаем

Ответ: $(-3; -2) \cup (-1; 1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$. \diamond

Пример 17. (МГУ, 1973, биофак) Найти все значения параметра a , для каждого из которых неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

\diamond Пусть $2^x = t > 0$, тогда неравенство примет вид $t^2 - at - a + 3 \leq 0$. Прежде всего, неравенство имеет решение, если дискриминант неотрицателен, т. е.

$$D = a^2 + 4a - 12 = (a + 6)(a - 2) \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty).$$

$$\text{При этом, } t^2 - at - a + 3 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[\frac{a - \sqrt{D}}{2} = t_1; \frac{a + \sqrt{D}}{2} = t_2 \right].$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все a , при которых неравенство верно хотя бы при одном положительном значении t . Для этого необходимо и достаточно, чтобы больший корень был положительным, т. е.

$$t_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a^2 + 4a - 12 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 2; \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a^2 + 4a - 12 - a^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset;$$

Ответ: $[2; +\infty)$. ♦