§6. Логарифмы с переменным основанием.
Уравнения вида $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$

Рассмотрим выражение $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$.

По определению, для любого $c > 0, c \neq 1$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}} \qquad (02)$$

т. е. $y(x)$ – это частное двух логарифмов, и областью определения (ОДЗ) является множество X, на котором

$$\underline{f(x) > 0,}\ \underline{a(x) > 0, a(x) \neq 1}.$$

Рассмотрим уравнение $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$.

ОДЗ: $a(x) > 0, a(x) \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$

Воспользуемся определением (02) и получим в ОДЗ

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \frac{\lg f(x)}{\lg a(x)} = \frac{\lg g(x)}{\lg a(x)} \Leftrightarrow \lg f(x) = \lg g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x). \ *$$

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ в ОДЗ.}} \qquad \text{(УР ЛЗ)}$$

Можно записать полное условие равносильности

$$\boxed{\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}} \qquad \text{(УР ЛЗ*)}$$

Пример 11. (МФТИ, 1981) Решите уравнение

$$2\log_x\left(4 + \sqrt{x}\right) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2.$$

♦ $\quad 2\log_x\left(4 + \sqrt{x}\right) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2 \Leftrightarrow \log_x\left(4 + \sqrt{x}\right) = 1 - \log_x 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_x\left(4 + \sqrt{x}\right) = \log_x \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \sqrt{x} = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 8 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Ответ: 16. ♦

Метод интервалов для логарифмических и показательных неравенств.

В курсе математического анализа для 10-го класса доказывается теорема:

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и не обращается в 0 на открытом промежутке $(a;b)$, то $f(x)$ имеет один и тот же знак во всех внутренних точках отрезка $[a;b]$.

Это и есть основание для метода интервалов для непрерывной функции: найти нули $f(x)$ и определить знаки $f(x)$ на промежутках между соседними нулями, вычислив значения в пробных точках.