Федеральное агентство по образованию
Московский физико – технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Исследование функций. Тригонометрические уравнения

Задание №4 для 10-х классов

(2004-2005 учебный год)

г. Долгопрудный, 2004

Составитель: С.И. Колесникова, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 10-х классов (2004-2005 учебный год). - М.: МФТИ, 2004, 31с.

Составитель:
Колесникова София Ильинична
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 09.12.04
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,93
Уч.-изд. л. 1,72. Тираж 2300. Заказ №10-з.

Заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§ 1. Определение функции. Числовые функции и их графики

Пусть X и Y - произвольные множества. Говорят, что на X задано отображение, или задана функция, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие **единственный** элемент y множества Y. Закон соответствия обычно обозначается какой-нибудь буквой, часто буквой f, а само соответствие обозначается $f: X \to Y$ или $y = f(x)$. При этом $x \in X$ называется независимой переменной, или аргументом функции $f(x)$. Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Подмножество множества Y, состоящее из образов всех элементов X, называется образом множества X, или множеством значений функции $f(x)$, и обозначается $f(X) \subset Y$, или $E(f) \subset Y$.

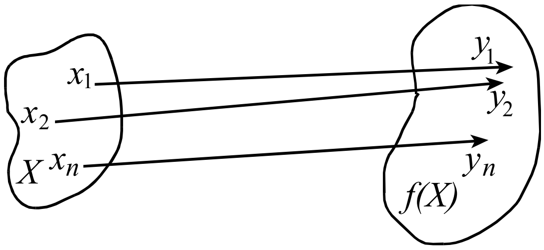


Рис. 1.

Например, на рис. 1 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_1, f(x_n) = y_2$. При этом различным элементам множества X может соответствовать один и тот же элемент множества Y $(y_1 = f(x_2) = f(x_1))$, но **одному элементу множества X должен соответствовать один элемент из множества Y.**

Пример 1. Поставим в соответствие каждому человеку планеты его группу крови. Тогда X состоит из нескольких миллиардов человек, а $f(X)$ состоит их 4-х чисел. Замечаем, что очень многим элементам множества X ставится в соответствие одно и то же число.

Пример 2. Поставим каждому человеку планеты отпечаток большого пальца его правой руки. Теперь X – то же, что и примере 1, а $f(X)$ – множество "картинок". Как известно, у разных людей разные отпечатки!

В алгебре и математическом анализе мы, в основном, изучаем **числовые** функции, где множества X, Y являются подмножествами, например, числовой оси. Тогда $f(X)$ называется **множеством значений** функции и обозначается $E(f)$.

Пример 3. (графики на рис. 2).

а) $g: R_+ \cup \{0\} \to R: y = \sqrt{x} (D(g) = R_+ \cup \{0\}, E(g) = R_+ \cup \{0\})$.

б) $f: (-\infty;0) \cup (0;+\infty) \to R: y = \dfrac{1}{x}. (E(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty))$.

в) $f: R \to R:$ $y = |x|$ (модуль, или абсолютная величина числа x). По определению,

$$|x| = \begin{cases} x, если\ x \ge 0; \\ -x, если\ x < 0. \end{cases} \quad (D(f) = R, E(f) = [0;+\infty) \equiv R_+ \cup \{0\}).$$

г) $y = signx \equiv \left[\begin{array}{l} 1, если\ x > 0; \\ 0, если\ x = 0; \\ -1, если\ x < 0. \end{array} \right. \Rightarrow D(y) = R, E(y) = \{-1,0,1\}.$ (читается "сигнум", что означает "знак").

Графиком функции $y = f(x)$ на координатной плоскости (x, y) называется множество точек $(x, f(x))$.

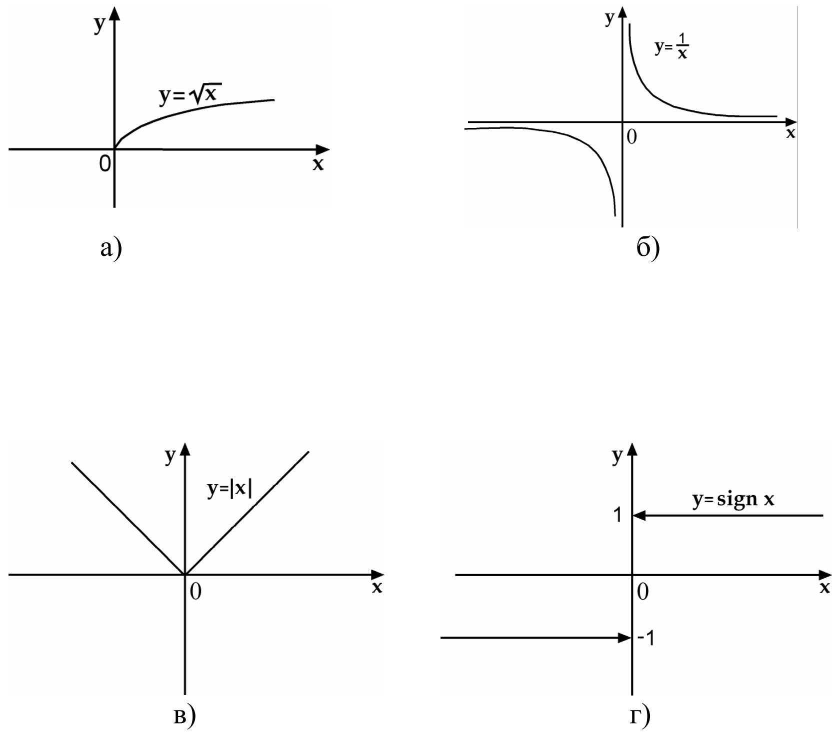


Рис. 2

Пример 4. Функция $y = [x]$ – целая часть числа x. Величина $[x]$ определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x. Если $x \in [0;1)$, то $[x] = 0$. Если $x \in [1;2)$, то $[x] = 1$. Если $x \in [2;3)$, то $[x] = 2$ и т.д. Рассмотрим теперь отрицательные значения x. Если $x \in [-1;0)$, то $[x] = -1$. Если $x \in [-2;-1)$, то $[x] = -2$ и т.д. График функции изображен на рис.3. Ясно, что $D(f) = R; E(f) = Z$ (так обозначается множество всех целых чисел).

Если функция задана формулой $y = f(x)$ и не задана область определения, то её областью определения называется множество всех x, для которых формула имеет смысл.

Пример 5.

а) $y = x^2$ (т. к. x^2 определено для любого x, то $D(y) = R$; функция не имеет обратной).

б) $y = x^2, D(y) = [0;+\infty)$ (функция имеет обратную $x = \sqrt{y}$).

в) $y = \sin x$ ($D(y) = R$, функция не имеет обратной).

г) $y = \sin x, D(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (функция имеет обратную $x = \arcsin y$).

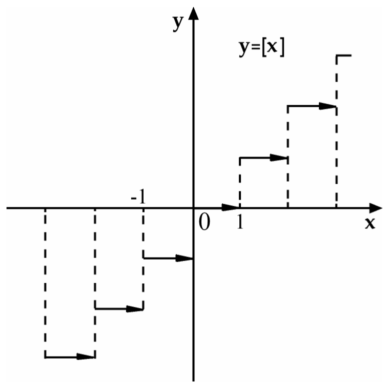
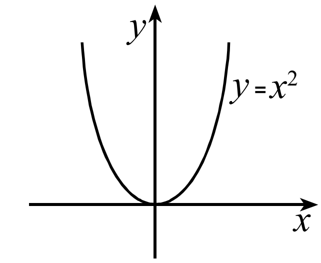
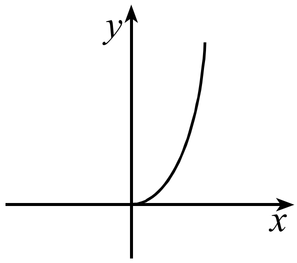


Рис. 3

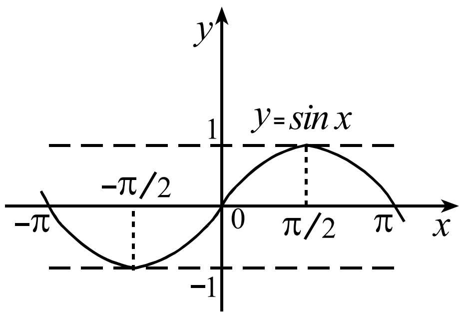
Функции пунктов а) и б) **различны**, т. к. у них разные области определения, хотя и одинаковые законы соответствия в общих областях! По этой же причине различны функции пунктов в) и г).



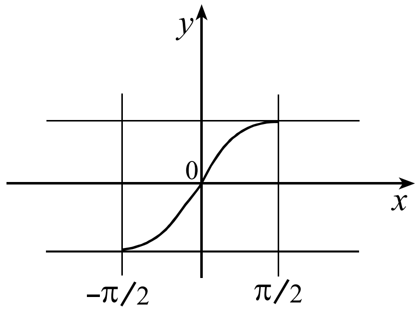
а)



б)



в)



г) $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

Рис. 4

§2. Обратная функция

Рассмотрим отображение $f : X \to f(X)$ или $E(f)$(обратим внимание на то, что мы рассматриваем отображение не просто в Y, а в ту его часть, которая состоит из образов всех $x \in X$) такое, что **различным** $x \in X$ соответствуют **различные** $y = f(x) \in Y$, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$(рис. 5). Такое отображение $f : X \to f(X)$ называется взаимно однозначным.

В этом случае соответствие между $f(X)$ и X также является функцией с областью определения Y и областью значений X (рис.5), т. к. каждому $y \in f(X) \equiv E(f)$, по определению $f(X)$, соответствует, по крайней мере, один $x \in X$, а, в силу взаимной однозначности отображения, ровно один. Эта функция называется *обратной* к функции

f и обозначается f^{-1}. Отметим, что

$$D(f) = E(f^{-1}) = X; \; E(f) = D(f^{-1}) = Y.$$

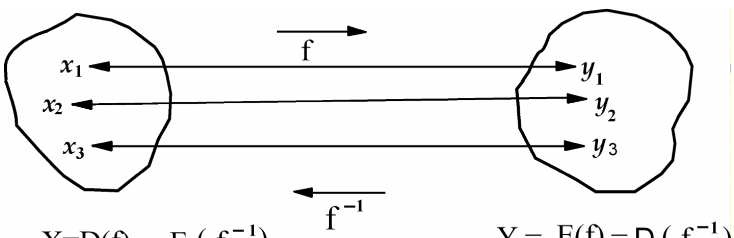


Рис. 5

Итак, **функция имеет обратную, если она осуществляет взаимно однозначное соответствие** между $D(f)$ и $E(f)$. (Поэтому, например, строго монотонная функция всегда имеет обратную.)

Пример 6. Отображение примера 1 не является взаимно однозначным. Отображение примера 2 является взаимно однозначным и даёт возможность идентифицировать человека по его отпечатку.

Пример 7. Рассмотрим функцию $y = x^3$.

Сравним значения функции в различных точках: $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 \equiv (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = x_2$, т. е. рассматриваемое отображение взаимно однозначно. **Любая** горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график функции в **единственной** точке. Абсцисса этой точки **обозначается** $\sqrt[3]{a}$. Она является единственным решением уравнения $x^3 = a$.

Функция $y = x^3$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между областью определения $D(f) = R$ и множеством значений $E(f) = R$. Поэтому существует обратная функция f^{-1} с областью определения $D(f^{-1}) = R$ и множеством значений $E(f^{-1}) = R$. Эта функция обозначается: $x = \sqrt[3]{y}$. Если переобозначить переменные более привычно, то формула примет вид: $y = \sqrt[3]{x}$ (график на рис. 7). Графики исходной функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ – биссектрисы первого и третьего координатных углов (x и y поменялись местами).

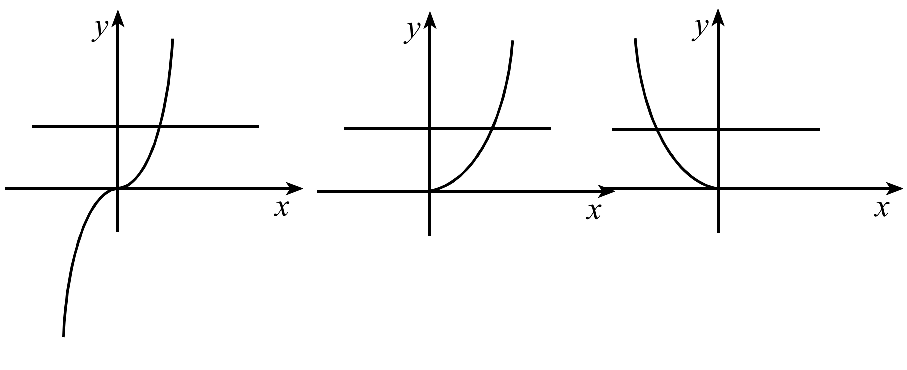


Рис. 6

Пример 8. Рассмотрим функцию $y = x^2$ (раз не указана область определения, то $D(f) = R$). Она не имеет обратной функции, так как различным $x_1 \neq 0$ и $x_2 = -x_1$ соответствует один $y = x_1^2 = x_2^2$, т. е. не существует взаимно однозначного соответствия между $D(f)$ и $E(f) = [0;+\infty)$.

Пример 9. Рассмотрим другую функцию: $y = x^2$, $D(f) = [0;+\infty)$ (рис.6б). Любая прямая $y = a, a \geq 0$ пересекает кривую в единственной точке, абсцисса которой **обозначается** $\sqrt{a}$. В этом случае соответствие между $D(f) = [0;+\infty)$ и $E(f) = [0;+\infty)$ является взаимно однозначным, и существует обратная функция f^{-1}. Она обозначается: $x = \sqrt{y}$ с областью определения $D\left(f^{-1}\right)=[0;\infty)$ и множеством значений $E\left(f^{-1}\right)=[0;\infty)$. В привычных переменных это функция $y=\sqrt{x}$ (рис. 8).

Пример 10. Можно рассмотреть ещё одну функцию:
$y=x^2, D(f)=(-\infty;0]$(рис.6в). Эта функция строго монотонна и тоже имеет обратную: $x=-\sqrt{y}$ с $D\left(f^{-1}\right)=[0;+\infty), E\left(f^{-1}\right)=(-\infty;0]$.

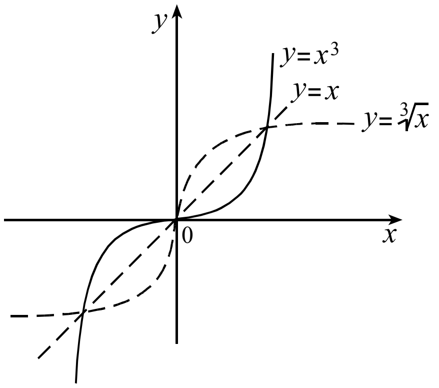


Рис. 7

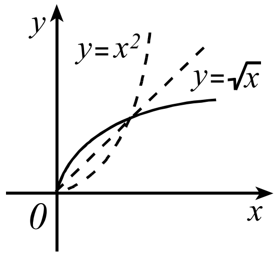


Рис. 8

§ 3. Монотонные функции. Четные и нечетные функции

Числовая функция $f(x)$, определённая на множестве X, называется возрастающей (убывающей) на этом множестве, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_2 > x_1$ следует, что

$$f(x_2) > f(x_1)\left(f(x_2) < f(x_1)\right).$$

Функция возрастающая или убывающая на множестве, называется монотонной функцией. Для нас важно, что отсюда следует, что из $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, а следовательно, любая **монотонная функция имеет обратную**. Монотонность элементарных функций можно доказывать непосредственно или с помощью производных (это будет позже). Можно рассматривать ещё так называемые не строго монотонные функции – это функции, для которых для любых $x_1, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)\left(f(x_2) \leq f(x_1)\right)$. К ним относится функция $y=const$, которая не имеет обратной.

Пример 11. Рассмотрим функцию $y=\dfrac{1}{x}$. Формула имеет смысл для $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, что и будет $D(y)$. Исследуем разность $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{-(x_2-x_1)}{x_1x_2}$. Отсюда следует, что, если $x_2 > x_1$ и $x_1x_2 > 0$, т. е. они одного знака, то разность отрицательна. Следовательно, функция убывает на $(-\infty;0)$ и убывает на $(0;+\infty)$, но не убывает на $D(y)$ (а потому не является монотонной на области определения), т. к. $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > 0$ (что подтверждает правильность рис. 2б).

Функция $f(x)$ называется четной (нечетной) на X, если выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $-x \in X$, т. е. область определения симметрична относительно 0.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x)=f(-x)$ $\left(f(x)=-f(-x)\right)$.

Если функция не является чётной или нечётной, то говорят, что она является функцией общего вида.

Пример 12. Определить, являются ли чётными, нечётными или функциями общего вида следующие функции:

а) $y=\sqrt{x}$, б) $y=\cos 4x$, в) $y=\dfrac{x^3-4\sin 2x}{ctgx}$,

г) $y=|x+1|-|x-1|$, д) $y=\dfrac{x-1}{x^2+4}$.

♦а) $y=\sqrt{x}$ является функцией общего вида, т. к. её область определения $D(y)=[0;+\infty)$ не симметрична относительно 0.

б) $y=\cos 4x$ – чётная функция.

в) $y=\dfrac{x^3-4\sin 2x}{ctgx}$ – чётная функция, т. к.

1) область определения $D(y)$ этой функции, состоящая из объединения счётного множества интервалов вида $\left(\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$, симметрична относительно 0;

2) для любого $x\in D(y)\Rightarrow y(x)=y(-x)$.

г) $y=|x+1|-|x-1|$ – нечётная, т. к.

$y(-x)=|-x+1|-|-x-1|=-(|x+1|-|x-1|)=-y(x)$.

д) $y=\dfrac{x-1}{x^2+4}$ – функция общего вида, т. к., например,

$$\begin{cases}0=y(1)\neq y(-1)=-\dfrac{2}{5},\\ y(1)\neq -y(-1).\end{cases}$$ ♦

График любой чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график любой нечётной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому для построения графиков таких функций достаточно построить их для положительных значений, а затем продолжить чётным или нечётным образом соответственно.

Посмотрим, как используется чётность функций при решении задач.

Пример 13. (МГУ, 1990, мехмат). Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-2a\sin(\cos x)+a^2=0$ имеет единственное решение.

♦Заметим, что левая часть уравнения является чётной функцией на R. Поэтому, если уравнение имеет решение $x=x_0$, то $x=-x_0$ тоже является решением. Если $x_0\neq -x_0 \Leftrightarrow x_0\neq 0$, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня. Поэтому, если корень один, то это $x=0$. Посмотрим, при каких a уравнение имеет такой корень.

$$x=0: -2a\sin 1+a^2=0 \Leftrightarrow a=\left[\begin{array}{l}0,\\ 2\sin 1.\end{array}\right.$$

Но при таких a уравнение может иметь, вообще говоря, и другие корни – такие a нам не подходят. Найдём все решения при полученных a.

$a=0: x^2=0 \Leftrightarrow x=0;$

$a=2\sin 1: x^2-4\sin 1\sin\cos x+4\sin^2 1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=4\sin 1(\sin\cos x-\sin 1)\leq 0 (\sin\cos x\leq \sin 1) \Leftrightarrow x=0.$

Итак, при этих a имеем единственное решение $x=0$.

Ответ: $0; 2\sin 1$. ♦

§ 4. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется периодической на X, если существует число T, для которого выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $x+T \in X, x-T \in X$.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x+T)=f(x)=f(x-T)$.

Если функция имеет период T, то любое число вида nT, $n \in Z$ – тоже период. Поэтому, говоря о периоде функции, часто имеют в виду наименьший положительный (НПП)период, если таковой существует. Из школы, например, известно, что $y=\sin x, y=\cos x$ имеют наименьший положительный период $T=2\pi$, а $y=tgx, y=ctgx$ имеют наименьший положительный период $T=\pi$. Область определения tgx и $ctgx$ не совпадает с R, но является периодичной с периодом π.

Не все периодические функции имеют наименьший положительный период: например, $y(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$ является суммой двух функций, каждая из которых имеет наименьший положительный период π. Но сумма $y(x)$ НПП не имеет, т. к. $y=\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$, и её периодом является любое действительное число.

Пример 14. (МГУ, 1996, геогр. ф-т). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T=\sqrt{2}$. Найти значение $f(\sqrt{8})$, если известно, что $3f^2(0)+7f(\sqrt{72})+4=0$ и $f^2(-\sqrt{2})+3f(\sqrt{8})+\dfrac{20}{9}=0.$

♦ В силу периодичности,

$$f(0)=f(k\sqrt{2}), k\in Z$$
$$\Rightarrow f(0)=f(\sqrt{8})=f(2\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{72})=f(6\sqrt{2}).$$

Поэтому

$$\begin{cases} 3f^2(0)+7f(\sqrt{72})+4=0, \\ f^2(-\sqrt{2})+3f(\sqrt{8})+\dfrac{20}{9}=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3f^2(0)+7f(0)+4=0, \\ f^2(0)+3f(0)+\dfrac{20}{9}=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2f(0)+4-\dfrac{20}{3}=0 \Leftrightarrow f(0)=-\dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{16}{9}-4+\dfrac{20}{9}\equiv 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$. ♦

Пример 15. (МГУ, 2000, ф-т почвоведения). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x)=8x-x^2$ при $x\in[0;8]$. Решите уравнение $f(2x+16)+23=5f(x)$.

♦В силу периодичности $f(x)$, во-первых, достаточно найти решения уравнения на любом отрезке длины 8, во-вторых, $f(2x+16)=f(2x)$, поэтому $f(2x+16)+23=5f(x) \Leftrightarrow f(2x)+23=5f(x)$.

Посмотрим, при каких n аргумент $f(2x+n\cdot 8)$ принадлежит промежутку, в котором определена $f(x)$, т. е.

$$0\le 2x+n\cdot 8\le 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le 2x\le 8-8n \Rightarrow n\le 1, \\ 16\ge 2x\ge -8n \Rightarrow n\ge -2. \end{cases}$$

Рассмотрим каждый случай.

$n=1: 0\le x\le 0 \Leftrightarrow x=0,$

$n=0: 0\le 2x\le 8 \Leftrightarrow 0\le x\le 4 \Rightarrow f(2x)=8\cdot 2x-(2x)^2 \Rightarrow 16x-4x^2+23=40x-5x^2 \Rightarrow x=1,$

$n=-1: 0\le 2x-8\le 8 \Leftrightarrow 4\le x\le 8 \Leftrightarrow f(2x)=f(2x-8)=8(2x-8)-(2x-8)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x-64-4x^2+32x-64+23=40x-5x^2 \Leftrightarrow x^2+8x-105=0 \Rightarrow x=7.$

$n=-2; 0\le 2x-16\le 8 \Leftrightarrow 8\le x\le 12.$ Здесь уже нет необходимости рассматривать.

В силу периодичности, решениями будут числа

$1+8\cdot n, 7+8\cdot m, n, m\in Z. \Rightarrow$

Ответ: $1+8n,\ 7+8m,\ n,\ m\in Z.$ ♦

§ 5. Обратные тригонометрические функции

Пример 16. (МИФИ). Найти наибольшее значение $f(x)=arctg(\sin 11x)+arcctg(\sqrt{3}\cos 2x)$ и x, при которых оно достигается.

♦ $-1\le \sin 11x\le 1 \Rightarrow -\dfrac{\pi}{4}=arctg(-1)\le arctg(\sin 11x)\le arctg(1)=\dfrac{\pi}{4},$

$-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\cos 2x\le\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6}=arcctg\sqrt{3}\le arcctg(\sqrt{3}\cos 2x)\le arcctg(-\sqrt{3})=\dfrac{5\pi}{6}.$

Поэтому $-\dfrac{\pi}{12}\le arctg(\sin 11x)+arcctg(\sqrt{3}\cos 2x)\le\dfrac{13\pi}{12}$, при этом $f_{\max}(x)=\dfrac{13\pi}{12}$, если

$$\begin{cases}\sin 11x=1, \\ \cos 2x=-1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z, \\ \sin 11\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)=(-1)^{11k}\sin\dfrac{3\pi}{2}=-(-1)^{11k}=1 \Leftrightarrow k=2n-1,\ n\in Z. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=2\pi n-\dfrac{\pi}{2}, n\in Z \Rightarrow$ Ответ: $f_{\max}(x)=f\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\dfrac{13\pi}{12}.$ ♦

Зачем нужно уметь строить элементарные графики?

Пример 17. (МФТИ, 2002) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+3-|x+2|)(a+x^2+4x)=0$ имеет

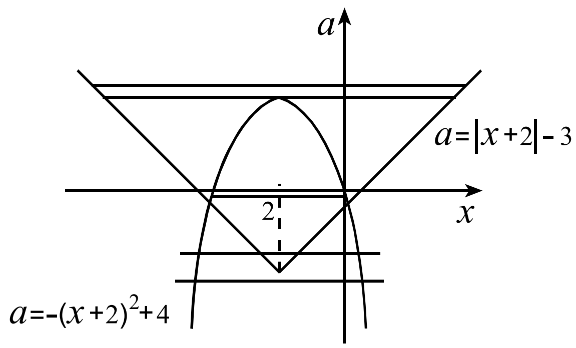
1) ровно три корня, 2) ровно два корня.

♦ $(a+3-|x+2|)(a+x^2+4x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+3-|x+2|=0 \Leftrightarrow a=|x+2|-3, \\ a+x^2+4x=0 \Leftrightarrow a=-(x+2)^2+4. \end{array}\right.$$

Совокупность проще всего решать в плоскости (x,a). Из картинки видно, что

1) уравнение имеет ровно три корня, если $a = \left[\begin{array}{l} -3, \\ 4. \end{array}\right.$;



2) уравнение имеет ровно два корня, если прямая $a = const$ проходит или выше параболы, или ниже вершины угла, или через точки пересечения параболы и угла. Найдём a, при котором имеем пересечение: $|x+2| - 3 = 4 - (x+2)^2 \Leftrightarrow |x+2| = \dfrac{\sqrt{29}-1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{29}-7}{2}$. Поэтому

имеем ровно два корня, если $\left[\begin{array}{l} a > 4, \\ a < -3, \\ a = \dfrac{\sqrt{29}-7}{2}. \end{array}\right.$

<u>Ответ:</u> 1) $\{-3;4\}$, 2) $(-\infty;-3) \cup \left\{\dfrac{\sqrt{29}-7}{2}\right\} \cup (4;+\infty)$. ♦

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Элементарные тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a| > 1, \\ \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} |a| \le 1, \\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$

2. $\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |a| > 1, \\ \varnothing; \end{cases} \\ \begin{cases} |a| \le 1, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z. \end{cases} \end{array}\right.$

3. $tgx = a \Leftrightarrow x = arctga + \pi n, n \in Z.$
4. $ctgx = a \Leftrightarrow x = arcctga + \pi n, n \in Z.$

Пример. $\sin x = \dfrac{1-\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow \varnothing$, т.к. $\dfrac{1-\sqrt{10}}{2} = \dfrac{1-3,\dots}{2} = -1,\dots < -1.$

Основные примеры решения тригонометрических уравнений

1. Во многих случаях тригонометрическое уравнение удается преобразовать к виду $f(\sin mx) = 0$ (или $f(\cos mx) = 0$, или $f(tgx) = 0$). Затем надо решить уравнение $f(t) = 0,$ где $t = \sin mx,$ и для корней $t_k,$ по модулю не больше 1, решить элементарные тригонометрические уравнения $\sin mx = t_k$.

Это заведомо можно сделать в следующих случаях.

а) $F\left(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow F\left(1-\cos^2 x, \cos^2 x, \cos x\right) = 0.$

б) Квадратное уравнение относительно $\cos x, \sin x$.

1) $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cos^2 x + b\sin^2 x + 2c\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow b\cdot tg^2 x + 2c\cdot tgx + a = 0$ или

2) $a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x = d \equiv d\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b-d)tg^2 x + c\cdot tgx + (a-d) = 0.$

Пример 18. (МГУ, 1995, ф-т почв.) Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0$ не имеет рений.

♦ $\cos 2y + 4a\cos y + 2a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2\cos^2 y - 1 + 4a\cos y + 2a^2 + 1 \Leftrightarrow$
$2(\cos y + a)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos y = -a \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1, \\ y \in \varnothing. \end{cases}$$

Пример 19. (МГУ, 1991, химфак).

$$16\cos^4\frac{x}{4} + 6\sin^2\frac{x}{4} = 3\cos\frac{x}{2} + 12\cos^2\frac{x}{4}\cos 3x.$$

♦ $16\cos^4\dfrac{x}{4} + 6\sin^2\dfrac{x}{4} = 3\cos\dfrac{x}{2} + 12\cos^2\dfrac{x}{4}\cos 3x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)^2 + 3\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) = 3\cos\frac{x}{2} + 6\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\cos 3x \Leftrightarrow$$

$$4\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}(1-3\cos 3x) + 7 - 6\cos 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{-1+3\cos 3x \pm 3\sqrt{(\cos 3x+3)(\cos 3x-1)}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 1, \\ \cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi n \Rightarrow \cos 3\left(\pm\dfrac{2}{3} + 4n\right)\pi \equiv 1, n \in Z. \end{cases}$$

в) Уравнение, однородное относительно $\cos kx, \sin mx$, т. е. $F(\sin x, \cos x) = 0$, где $F(t\sin kx, t\cos mx) = t^n F(\sin kx, \cos mx)$. Это уравнение приводится к уравнению с одним неизвестным заменой переменных $t=\dfrac{\cos kx}{\sin mx}$ (или $t=\dfrac{\sin mx}{\cos kx}$), где предварительно проверяется, не является ли решением $\sin mx=0$ (или $\cos kx=0$).

3. Уравнение вида $\sin ax+\cos bx=0$ **(аналогично** $tgax+ctgbx=0$**)**

$$\sin ax+\cos bx=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin ax+\sin\left(\frac{\pi}{2}-bx\right)=0\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{a-b+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b-\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0.$$

Пример 20. $\sin 7x-\cos 19x=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 7x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-19x\right)=0\Leftrightarrow 2\sin\left(13x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(13x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\frac{\pi}{4}+k\pi}{13},\\[3ex] \cos\left(6x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow \dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi+\frac{\pi}{4}}{6}.\end{array}\right.$$

3. Уравнения вида $a\sin\alpha x+b\cos\alpha x=0,\ ab\neq 0.$

$$a\sin\alpha x+b\cos\alpha x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha x=0\Rightarrow\sin\alpha x=0\Rightarrow\varnothing;\\ \left\{\begin{array}{l}\cos\alpha x\neq 0,\\ tg\alpha x=-\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow x=\dfrac{-arctg\frac{b}{a}+k\pi}{\alpha}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Пример 21. $4\sin 3x-7\cos 3x=0.$

$$4\sin 3x-7\cos 3x=0\Leftrightarrow tg3x=\frac{7}{4}\Leftrightarrow x=\frac{arctg\frac{7}{4}+k\pi}{3}.$$

4. Уравнения вида $\sin x+\cos x=a.$

$$\sin x+\cos x=a\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=a\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=a\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right|\le 1,\\ x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{a}{\sqrt{2}}+2k\pi,k\in Z.\end{array}\right.$$

5. Разложение на множители. Это самый распространенный метод решения тригонометрических уравнений

а) Применение формул тригонометрии.

Пример 22. (МГУ, 2001, биофак). $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin x=\dfrac{1}{2}$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 2x\cdot\frac{1}{2}+\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x=\sin^2 x\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\Leftrightarrow x=\pi n,\\ \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n, \pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k.n\in R.$

Применяя формулы тригонометрии, всегда надо помнить, что **не все формулы** тригонометрии **являются тождествами.**

Чтобы не пользоваться неравносильными переходами для тангенсов, лучше перейти сразу к синусам и косинусам.

Пример 23. $ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=5tg2x+7.$

$$ctg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=5tg2x+7\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{5\sin 2x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}+7\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq\sin x,\\ 1+\sin 2x=5\sin 2x+7\cos 2x\Leftrightarrow 4\sin 2x+7\cos 2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+arcctg5+\pi n,\\ x=\frac{\pi}{4}-arcctg\frac{1}{3}+\pi n.\end{array}\right.$$

б) Группировка слагаемых, применение формул (особенно часто используются формулы $\cos 2x$ в той или иной форме):

Пример 24. (МФТИ,2001). Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\sin^3 x\cos 3x}{\cos 2x}=3\sin 2x\cos x.$$

$$\blacklozenge\ \frac{\cos^3 x\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\sin^3 x\cos 3x}{\cos 2x}=3\sin 2x\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos^2 x\cos x\sin 3x+\sin^2 x\sin x\cos 3x}{\cos 2x}\equiv$$

$$\equiv\frac{(1+\cos 2x)(\sin 4x+\sin 2x)+(1-\cos 2x)(\sin 4x-\sin 2x)}{4\cos 2x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{6\sin 2x\cos 2x}{4\cos 2x}=3\sin 2x\cos x\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x(1-\cos x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2},\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\frac{k\pi}{2},\\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Пример 25. (МФТИ, 2002). Решите уравнение

$$\frac{3+\cos 4x-8\cos^4 x}{4(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{3+\cos 4x-2(1+\cos 2x)^2}{4(\cos x+\sin x)}\equiv$$

$$\equiv\frac{-4\cos 2x}{4(\cos x+\sin x)}\equiv\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\sin x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x+\sin x\neq 0,\\ \sin x\neq 0,\\ \sin^2 x-\sin x\cos x-1=0\Leftrightarrow \cos x(\cos x+\sin x)=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.♦

в) Преобразование произведения в сумму, а затем в новое произведение.

Пример 26. Решите уравнение

♦ $\cos 14x\cos 15x=\cos 16x\cos 17x$.

$$\cos 14x\cos 15x=\cos 16\cos 17\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\cos 29x+\cos x)=\frac{1}{2}(\cos 33x+\cos x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 31x\sin 2x=0\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi n}{31},\\ \frac{\pi n}{2}, n\in Z.\end{array}\right.\Rightarrow$$

Ответ: $\frac{\pi n}{31}, \frac{\pi n}{2}, n\in Z$. ♦

Пример 27. (МФТИ,1984) Решите уравнение

$$\sqrt{6\sin x\cos 2x}=\sqrt{-7\sin 2x}.$$

♦ $\sqrt{6\sin x\cos 2x}=\sqrt{-7\sin 2x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\le 0,\\ 6\sin x\cos 2x=-7\sin 2x.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\le 0,\\ \sin x(6\cos^2 x+7\cos x-3)=0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0;\\ \begin{cases}\sin 2x\le 0,\\ \cos x=\left[\begin{array}{l}-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\varnothing,\\ \frac{1}{3}.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ \begin{cases}\cos x=\frac{1}{3},\\ 2\sin x\cos x\le 0\Rightarrow\sin x\le 0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n.$ Ответ: $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n, n\in Z.$

6. $F(\sin 2x,(\sin x\pm\cos x))=0$.

$$(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x\Leftrightarrow\sin 2x=1-(\sin x-\cos x)^2.$$

$$t=\sin x-\cos x\Rightarrow F(\sin 2x,\sin x-\cos x)\equiv F(1-t^2,t)=0$$

$$(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x\Leftrightarrow\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1$$

$$t=\sin x+\cos x\Rightarrow F(\sin 2x,\sin x+\cos x)\equiv F(t^2-1,t)=0$$

Пример 28.(МГУ, 1994, физфак) $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$.

♦ $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \cos x - \sin x - 1, \\ \cos x - \sin x - 1 \geq 0.. \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (\cos x - \sin x)^2 = \cos x - \sin x - 1 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = \left[\begin{array}{l} -2 \Rightarrow \varnothing, \\ 1; \end{array}\right. \\ \cos x - \sin x - 1 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

<u>Ответ:</u> $\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

7. $F\left(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x, \cos 2x\right) = 0 \Leftrightarrow f(\cos 2x) = 0$

8. $$F(\sin x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \begin{cases} \cos\frac{x}{2} \neq 0, \\ F\left(\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}, \dfrac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}\right) \equiv f\left(tg\frac{x}{2}\right) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

9. Универсальная подстановка, которая приводит уравнение $F(\sin x, \cos x) = 0$ к уравнению с одним переменным $t = tg\frac{x}{2}$.

$$F(\sin x, \cos x) = 0 \Leftrightarrow F\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

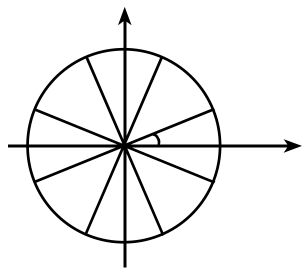
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ F\left(0, -\sin^2\frac{x}{2}\right) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\frac{x}{2} \neq 0, \\ F\left(\cos^2\frac{x}{2} \cdot 2tg\frac{x}{2}, \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow F\left(\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}, \dfrac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(tg\frac{x}{2}\right) = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

10. Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$, $ab \neq 0$. Введение вспомогательного угла

Рассмотрим выражение:

$$y(x) = a\sin x + b\cos x \equiv \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right)$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 \equiv 1.$$



Поэтому точки с координатами $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $\left(\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ принадлежат единичной окружности (всего восемь точек), и каждая пара координат может быть принята за косинус и синус соответствующего угла.

При этом всегда найдутся две пары положительных чисел, а, значит, угол в первой четверти, который может быть записан в виде любого “арка”.

При необходимости или желании можно выбрать любую пару, преобразовав соответственно заданное выражение.

Примеры.

$$1. -3\cos x-4\sin x\equiv 5\left(-\frac{3}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x\right)\equiv -5\left(\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x\right)\equiv$$

$$\equiv -5\sin\left(x+\arcsin\frac{3}{5}\right)\equiv -5\cos\left(x-\arccos\frac{3}{5}\right)\equiv$$

$$\equiv 5\left(\sin\left(\pi+\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos x+\cos\left(\pi+\arcsin\frac{3}{5}\right)\sin x\right)\equiv 5\sin\left(\pi+\arcsin\frac{3}{5}+x\right)\equiv$$

$$\equiv 5\left(\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{5}\right)\cos x+\sin\left(\pi+\arccos\frac{3}{5}\right)\sin x\right)\equiv$$

$$\equiv 5\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{5}-x\right).$$

$$2. -3\cos x+4\sin x\equiv -5\left(\frac{3}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x\right)=-5\sin\left(x-\arcsin\frac{3}{5}\right)\equiv.$$

$$\equiv -5\cos\left(x+\arccos\frac{3}{5}\right).$$

$$3. -3\cos x+4\sin x\equiv 5\left(\frac{4}{5}\sin x-\frac{3}{5}\cos x\right)=5\sin\left(x-\arccos\frac{4}{5}\right)\equiv$$

$$\equiv 5\cos\left(x+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right).$$

В общем случае положим, например,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha.$$

Тогда заданное выражение $y(x)=a\sin x+b\cos x$ примет вид

$y(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$, т. к.

$$y(x)=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x)\equiv\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+x).$$

Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ примет **простейший вид**

$\sin(\alpha + x) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Пример 29. (МИФИ**).** Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a - 3$ имеет ровно три решения на отрезке $[-\pi;\pi]$.

ОДЗ: $a \le 1$.

$$a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}\sin 3x + \frac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}\cos 3x = \frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x + \alpha) = \frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}},$$

где $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}$, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3(1-a)}}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}}$.

Функция $f(x) = \sin(3x + \alpha)$ имеет период $\dfrac{2\pi}{3}$, поэтому ровно три решения на отрезке $[-\pi;\pi]$ может быть только тогда, если

$$\frac{2a - 3}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} = \pm 1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{a^2 - 3a + 3} = 2a - 3 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \left[\begin{array}{l}1,\\2.\end{array}\right. \Rightarrow$$

$a = 1$, и это значение не принимается ни на одном из концов отрезка $[-\pi;\pi]$. Проверим это.

$a = 1$: $a\sin 3x + \sqrt{3(1-a)}\cos 3x = 2a - 3 \Leftrightarrow$

$\sin 3x = -1 \Rightarrow \sin(-3\pi) = \sin 3\pi = 0 \ne \pm 1$.

Ответ: 1. ♦

11. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Пример 30. (МФТИ,2001). $tgx + tg3x = 4|\sin x|$

ОДЗ: $\cos x\cos 3x \ne 0$.

$$\frac{\sin 4x}{\cos x\cos 3x} \equiv \frac{4\sin x\cos x\cos 2x}{\cos x\cos 3x} = 4|\sin x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x = |\sin x|\cos 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x \ge 0,\\ \sin x(\cos 2x - \cos 3x) = 0;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\\ \begin{cases}\sin x \ge 0,\\ \cos 2x - \cos 3x = 0;\end{cases} \Leftrightarrow\end{array}\right.\\ \begin{cases}\sin x < 0,\\ \cos 2x + \cos 3x = 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\frac{2\pi k}{5}, \\ 2\pi k;\end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi(2n+1)}{5}, \\ \pi(2k+1).\end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi k}{5} : \cos\frac{2\pi k}{5} \neq 0, \cos\frac{6\pi k}{5} \neq 0, \sin\frac{2\pi k}{5} \geq 0, k=\left[\begin{array}{l} 5n, \\ 5n+1, \\ 5n+2. \end{array}\right.$$

$$x=\frac{\pi(2n+1)}{5} : \cos\frac{\pi(2n+1)}{5} \neq 0, \cos\frac{6\pi(2n+1)}{5} \neq 0, \sin\frac{\pi(2n+1)}{5} =$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}\right)<0, n=\left[\begin{array}{l} 5k+3, \\ 5k+4. \end{array}\right.$$

$$x=\left[\begin{array}{l} \pi k, \\ \frac{2\pi}{5}+2\pi k, \\ \frac{4\pi}{5}+2\pi k, \\ \frac{7\pi}{5}+2\pi k, \\ \frac{9\pi}{5}+2\pi k. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l} \pi k, \\ \frac{2\pi}{5}+\pi k, \\ \frac{4\pi}{5}+\pi k. \end{array}\right.$$

<u>Ответ:</u> $\pi k, \frac{2\pi}{5}+\pi k, \frac{4\pi}{5}+\pi k, k \in Z$.

12. Нестандартные уравнения

Пример 31. Решите уравнение $\sin^8 x - \cos^5 x = 1$.

♦ $\sin^8 x - \cos^5 x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^8 x - \cos^5 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(1-\sin^6 x\right)+\cos^2 x\left(1+\cos^3 x\right)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin^2 x = 0, \\ \cos^2 x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing; \\ \begin{cases} \sin^2 x = 0, \\ 1+\cos^3 x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi(2n+1), n \in Z; \\ \begin{cases} \sin^6 x = 1, \\ \cos^2 x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \\ \begin{cases} \sin^6 x = 1, \\ \cos^3 x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi(2n+1), \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. ♦

Контрольные вопросы

1(2). Сколько решений, удовлетворяющих условию $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$, имеет уравнение $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$?

2(2). (МГУ, 1995, ИСАА) Найдите x, если известно, что числа $-1, x+2, \sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

3(2). (МГУ, 2000, ф-т почв.) Найдите $20\cos(\alpha - \beta)$, если выполняются равенства: $\cos\alpha + \cos\beta = 0{,}3; \sin\alpha + \sin\beta = -1{,}1$.

Решите уравнения

4(2). (МГУ, 1996, химфак) $\cos 4x + \sin x \sin 3x = 0$.

5(2). (МГУ, 1996, геогр. ф-т) $\cos\left(\frac{3\pi+1}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi-1}{2}x\right) = 1$.

6(2). (МГУ, 1981, биофак) $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$.

7(2). (МГУ, 1995, химфак) $\cos 2x = 2(\cos x - \sin x)$.

8(2). Найдите решение уравнения $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$, принадлежащее промежутку $[0^\circ; 360^\circ]$.

9(2). Найдите наименьшее значение функции $y(x) = -x^2 - 2x$ на отрезке $[-2;2]$.

10(2). Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 - x^4$ на от- резке $[-2;2]$.

11(2). Найдите наименьшее значение функции

$$y = 2\cos 2x - 12\cos x + 15 .$$

12(2). Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos 2x + 4\sin x + 1$.

13(2). Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3$ в точке с абсциссой $x = 2$.

Задачи

Решите уравнения:

1(2). (МГУ, 2003, геогр. ф-т.) $ctg\left(\frac{11\pi}{2}-4x\right)+tgx=\sqrt{3}\left(1-\frac{tg4x}{ctgx}\right).$

2(5). (МФТИ, 2003) $\sin x+|\cos x|+\sin 4x=\cos 2x.$

3(4). (МФТИ, 2003) $\frac{|\cos 5x\cos 3x|-\sin 3x\sin 5x}{\cos 2x}=2\sin 2x.$

4(4). (МФТИ, 2004) $\cos 3x+\cos 2x=3|\cos x|-\cos 4x.$

5(3). (МФТИ, 2004) $\sin x\sqrt{1-\cos x-2\sin x}=\sin x+\cos x.$

6(3). (МГУ, 2003, мехмат)

$$\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos x}+\cos\frac{x}{2}\sqrt{5\cos(2x+\pi)-5+9\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=0.$$

7(4). (МГУ, 2003, мехмат) Найти все значения параметра α, при каждом из которых уравнение $\sin\arccos(5x)=\alpha+\arcsin\sin(7x-3)$ имеет единственное решение.

Решите системы уравнений:

8(4). (МФТИ, 1981)

$$\begin{cases}2\cos 2x=(1-tgx)(1+\sin y+\sin 2x),\\ 8\cos 2x\left(\cos^8 x-\sin^8 x\right)+1=25\cos^2 y.\end{cases}$$

9(5). (МФТИ,1982)

$$\begin{cases}3\cos(4x-2y)=\sqrt{2}\cos(2x-2y),\\ \sqrt{2}\sin(x+y)=3\sin(y-x).\end{cases}$$

10(3). $\begin{cases}\sin x\sin(x+y)=\frac{\cos x}{2},\\ \sin x\sin y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

11(3). $\begin{cases}\sin y=\sin x\cos(x+y),\\ \sin y\cos(x+y)=\sin x.\end{cases}$