

§ 4. Периодические функции

Функция $f(x)$ называется периодической на X , если существует число T , для которого выполнены два условия:

1. Если $x \in X$, то $x + T \in X, x - T \in X$.
2. Для любого $x \in X \Rightarrow f(x + T) = f(x) = f(x - T)$.

Если функция имеет период T , то любое число вида nT , $n \in Z$ – тоже период. Поэтому, говоря о периоде функции, часто имеют в виду наименьший положительный (НПП) период, если таковой существует. Из школы, например, известно, что $y = \sin x, y = \cos x$ имеют наименьший положительный период $T = 2\pi$, а $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ имеют наименьший положительный период $T = \pi$. Область определения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ не совпадает с R , но является периодичной с периодом π .

Не все периодические функции имеют наименьший положительный период: например, $y(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ является суммой двух функций, каждая из которых имеет наименьший положительный период π . Но сумма $y(x)$ НПП не имеет, т. к. $y = \sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, и её периодом является любое действительное число.

Пример 14. (МГУ, 1996, геогр. ф-т). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T = \sqrt{2}$. Найти значение $f(\sqrt{8})$, если известно, что $3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0$ и $f^2(-\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{8}) + \frac{20}{9} = 0$.

♦ В силу периодичности,

$$f(0) = f(k\sqrt{2}), k \in Z \\ \Rightarrow f(0) = f(\sqrt{8}) = f(2\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{72}) = f(6\sqrt{2}).$$

Поэтому

$$\begin{cases} 3f^2(0) + 7f(\sqrt{72}) + 4 = 0, \\ f^2(-\sqrt{2}) + 3f(\sqrt{8}) + \frac{20}{9} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3f^2(0) + 7f(0) + 4 = 0, \\ f^2(0) + 3f(0) + \frac{20}{9} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2f(0) + 4 - \frac{20}{3} = 0 \Leftrightarrow f(0) = -\frac{4}{3}, \\ \frac{16}{9} - 4 + \frac{20}{9} \equiv 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$. ♦

Пример 15. (МГУ, 2000, ф-т почвоведения). Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение $f(2x + 16) + 23 = 5f(x)$.

♦ В силу периодичности $f(x)$, во-первых, достаточно найти решения уравнения на любом отрезке длины 8, во-вторых, $f(2x + 16) = f(2x)$, поэтому $f(2x + 16) + 23 = 5f(x) \Leftrightarrow f(2x) + 23 = 5f(x)$.

Посмотрим, при каких n аргумент $f(2x + n \cdot 8)$ принадлежит промежутку, в котором определена $f(x)$, т. е.

$$0 \leq 2x + n \cdot 8 \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 2x \leq 8 - 8n \Rightarrow n \leq 1, \\ 16 \geq 2x \geq -8n \Rightarrow n \geq -2. \end{cases}$$

Рассмотрим каждый случай.

$$n = 1: 0 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$n = 0: 0 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(2x) = 8 \cdot 2x - (2x)^2 \Rightarrow 16x - 4x^2 + 23 = 40x - 5x^2 \Rightarrow x = 1,$$

$$n = -1: 0 \leq 2x - 8 \leq 8 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow f(2x) = f(2x - 8) = 8(2x - 8) - (2x - 8)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x - 64 - 4x^2 + 32x - 64 + 23 = 40x - 5x^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 105 = 0 \Rightarrow x = 7.$$

$n = -2; 0 \leq 2x - 16 \leq 8 \Leftrightarrow 8 \leq x \leq 12$. Здесь уже нет необходимости рассматривать.

В силу периодичности, решениями будут числа

$$1 + 8 \cdot n, 7 + 8 \cdot m, n, m \in Z. \Rightarrow$$

Ответ: $1 + 8n, 7 + 8m, n, m \in Z$. ♦