## §2. Обратная функция

Рассмотрим отображение $f : X \to f(X)$ или $E(f)$(обратим внимание на то, что мы рассматриваем отображение не просто в $Y$, а в ту его часть, которая состоит из образов всех $x \in X$) такое, что **различным** $x \in X$ соответствуют **различные** $y = f(x) \in Y$, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$(рис. 5). Такое отображение $f : X \to f(X)$ называется взаимно однозначным.

В этом случае соответствие между $f(X)$ и $X$ также является функцией с областью определения $Y$ и областью значений $X$ (рис.5), т. к. каждому $y \in f(X) \equiv E(f)$, по определению $f(X)$, соответствует, по крайней мере, один $x \in X$, а, в силу взаимной однозначности отображения, ровно один. Эта функция называется *обратной* к функции

$f$ и обозначается $f^{-1}$. Отметим, что

$$D(f) = E(f^{-1}) = X;\ E(f) = D(f^{-1}) = Y.$$

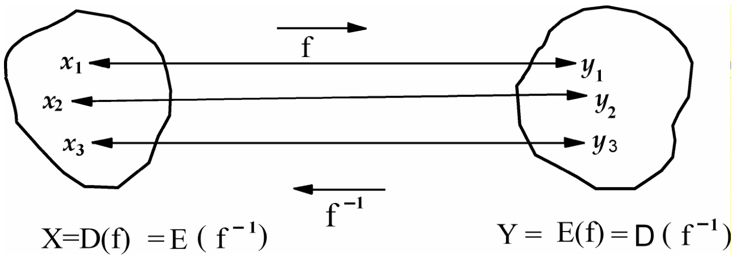



**Рис. 5**

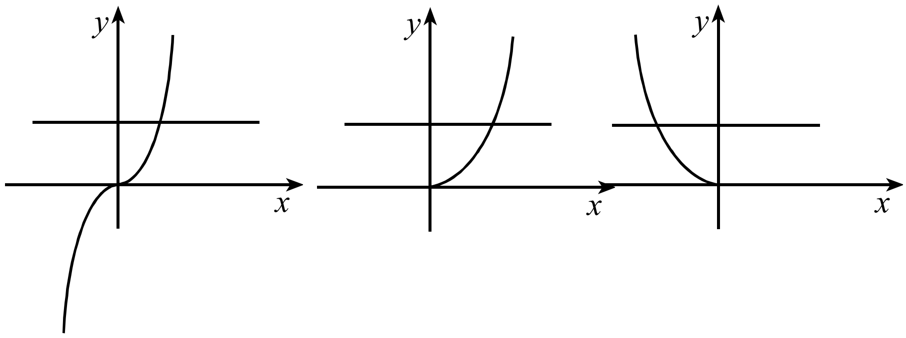
Итак, **функция имеет обратную, если она осуществляет взаимно однозначное соответствие** между $D(f)$ и $E(f)$.(Поэтому, например, строго монотонная функция всегда имеет обратную.)

**Пример 6.** Отображение примера 1 не является взаимно однозначным. Отображение примера 2 является взаимно однозначным и даёт возможность идентифицировать человека по его отпечатку.

**Пример 7.** Рассмотрим функцию $y = x^3$.

Сравним значения функции в различных точках: $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 \equiv (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = x_2$, т. е. рассматриваемое отображение взаимно однозначно. **Любая** горизонтальная прямая $y = a$ пересекает график функции в **единственной** точке. Абсцисса этой точки **обозначается** $\sqrt[3]{a}$. Она является единственным решением уравнения $x^3 = a$.

Функция $y = x^3$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между областью определения $D(f) = R$ и множеством значений $E(f) = R$. Поэтому существует обратная функция $f^{-1}$ с областью определения $D(f^{-1}) = R$ и множеством значений $E(f^{-1}) = R$. Эта функция обозначается: $x = \sqrt[3]{y}$. Если переобозначить переменные более привычно, то формула примет вид: $y = \sqrt[3]{x}$ (график на рис. 7). Графики исходной функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ – биссектрисы первого и третьего координатных углов ( $x$ и $y$ поменялись местами).




а) б) в)

**Рис. 6**

**Пример 8.** Рассмотрим функцию $y = x^2$ (раз не указана область определения, то $D(f) = R$). Она не имеет обратной функции, так как различным $x_1 \neq 0$ и $x_2 = -x_1$ соответствует один $y = x_1^2 = x_2^2$, т. е. не существует взаимно однозначного соответствия между $D(f)$ и $E(f) = [0;+\infty)$.

**Пример 9.** Рассмотрим другую функцию: $y = x^2$, $D(f) = [0;+\infty)$ (рис.6б ). Любая прямая $y = a, a \geq 0$ пересекает кривую в единственной точке, абсцисса которой **обозначается** $\sqrt{a}$. В этом случае соответствие между $D(f) = [0;+\infty)$ и $E(f) = [0;+\infty)$ является взаимно однозначным, и существует обратная функция $f^{-1}$. Она обозначается: $x = \sqrt{y}$ с областью определения $D(f^{-1}) = [0;\infty)$ и множеством значений $E(f^{-1}) = [0;\infty)$. В привычных переменных это функция $y = \sqrt{x}$ (рис. 8).

**Пример 10.** Можно рассмотреть ещё одну функцию:
$y = x^2, D(f) = (-\infty;0]$( рис.6в ). Эта функция строго монотонна и тоже имеет обратную: $x = -\sqrt{y}$ с $D(f^{-1}) = [0;+\infty), E(f^{-1}) = (-\infty;0]$.

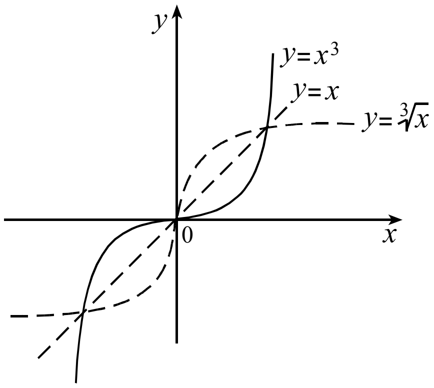



**Рис. 7**

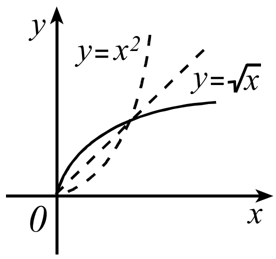



**Рис. 8**