§5. Преобразование двойных радикалов

Выражения вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ называют сложными или двойными радикалами. Мы уже рассматривали примеры, где можно избавиться от внешних радикалов.

Пример 1. Освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{23+4\sqrt{15}}$.

∇ Заметим, что выражение $23+4\sqrt{15}=20+3+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=$ $=\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$, тогда $\sqrt{23+4\sqrt{15}}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}=\left|2\sqrt{5}+3\right|=2\sqrt{5}+\sqrt{3}.$

Пример 2. Освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{124-70\sqrt{3}}$.

В этом примере укажем метод, как можно избавляться от внешнего радикала. Подберем целые числа a и b такие, чтобы $\sqrt{124-70\sqrt{3}}=$ $=a-b\sqrt{3}.$ Если такие числа есть, то должны выполняться такие условия:

$$\begin{cases}\left(a-b\sqrt{3}\right)^2=124-70\sqrt{3},\\ a-b\sqrt{3}\ge 0.\end{cases}$$

Из первого условия получаем

$$a^2-2ab\sqrt{3}+3b^2=124-70\sqrt{3},$$
$$a^2+3b^2-124=2ab\sqrt{3}-70\sqrt{3}.$$

Выражение a^2+3b^2-124 является целым числом, т. к. a и b – целые числа, значит левая часть, т. е. a^2+3b^2-124 является рациональным числом; выражение $(2ab-70)\sqrt{3}$ является рациональным выражением, если $2ab-70=0$, т. е. $ab=35$. Уравнению $ab=35$ удовлетворяют следующие пары чисел: $a=1, b=35;$ $a=5, b=7;$ $a=7, b=5;$ $a=35, b=1;$ $a=-1, b=-35;$ $a=-5, b=-7;$ $a=-7, b=-5;$ $a=-35, b=-1.$

Условию $a^2+3b^2-124=0$ удовлетворяют две пары чисел: $a=7, b=5$ и $a=-7, b=-5.$ Число $7-5\sqrt{3}$ не удовлетворяет условию $a-b\sqrt{3}\ge 0,$ а число $-7+5\sqrt{3}$ удовлетворяет этому условию. Таким образом, $\sqrt{124-70\sqrt{3}}=-7+5\sqrt{3}.$ ▲

В некоторых примерах удается избавиться от внешнего радикала, если воспользоваться тождеством

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Это тождество называют формулой двойного радикала. Оно справедливо, если $a>0, b>0$ и $a^2-b>0$. Тогда все три корня определены и $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}>\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, поэтому правая часть равенства положительная. Возведем в квадрат обе части равенства, получаем:

$$a\pm\sqrt{b}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{4}},$$
$$a\pm b=a\pm\sqrt{b}.$$

Пример 2. Освободитесь от внешнего радикала в выражении

$$\sqrt{56-\sqrt{2880}},$$

применяя тождество двойного радикала.

$$\sqrt{56-\sqrt{2880}} = \sqrt{\frac{56+\sqrt{3136-2880}}{2}} - \sqrt{\frac{56-\sqrt{3136-2880}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{56+16}{2}} - \sqrt{\frac{56-16}{2}} = 6-\sqrt{20} = 6-2\sqrt{5}. \blacktriangle$$