Контрольные вопросы

В вопросах 1 – 8 рассматриваются точки $A(1,1,3), B(4,-3,-2)$ и плоскость α, заданная уравнением $x+2y+2z+9=0$.

1(2). Составить уравнение плоскости β, проходящей через точки A, B и начало координат. Найти угол между плоскостями α и β.

2(2). Найти угол между прямой AB и плоскостью α.

3(2). Найти координаты ортогональной проекции точки A на плоскость α.

4(2). Найти координаты точки A^*, симметричной точке A относительно плоскости α.

5(2). Составить уравнение плоскости γ, параллельной плоскости α и проходящей через точку A. Найти расстояние от точки B до плоскости γ.

6(2). Составить уравнение сферы с центром в точке A и касающейся плоскости α.

7(2). Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A и B перпендикулярно плоскости α.

8(2). В тетраэдре $ABCS$ углы ACB, SAC и SBC – прямые, SO – высота тетраэдра. Выразить вектор $\overrightarrow{SO}$ через векторы $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{SC}$.

9(2). Можно ли в пространстве от одной точки отложить 4 вектора, попарно составляющих между собой равные углы?

10(2). $ABCD$ – правильный тетраэдр. Вершины A и B лежат на прямой l_1, вершины C и D – на прямой l_2. Какой угол образуют прямые l_1 и l_2? Как расположены точки A и B и точки C и D на прямых l_1 и l_2 относительно их общего перпендикуляра MN. Чему равно отношение $MN : AB$?

11(2). Скрещивающиеся диагонали параллельных граней параллелепипеда служат противоположными ребрами тетраэдра. Как относятся объемы тетраэдра и параллелепипеда? Используя установленный факт, доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot \sin\alpha\cdot d$, где α – угол между прямыми AB и CD, а d – расстояние между прямыми AB и CD.

12(2). В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $BC=2AB$, $BC=BB_1$. Где лежит центр сферы, касающейся ребер AB, BC, CC_1 и проходящей через точки D и D_1?

Задачи

(Все задачи взяты из вариантов вступительных экзаменов разных лет)

1(4). Даны точки $A(3,1,2), B(1,-1,-2), C(-1,3,-2), D(-1,0,1)$. Составить уравнение плоскости, параллельной прямым AB и CD и проходящей через середину общего перпендикуляра этих скрещивающихся прямых.

2(6). Длина высоты правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в $\sqrt{3}$ раза больше длины ребра a основания $ABCD$. Точка E – середина апофемы грани ASB. Найти

а) угол между прямой DE и плоскостью ASC;

б) расстояние между прямыми DE и SO, где O – центр основания (при координатном методе решения начало координат поместить в точку O, ось $OX \perp AB$, ось $OY \perp BC$).

3(6). В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с углом DAB, равным 60°. Вершина A_1 проектируется в точку C, $AB = 1$, $AA_1 = 2$. На прямой BC_1 взята точка M так, что прямые DA_1, AB_1 и D_1M параллельны одной плоскости. Найти длину отрезка D_1M. (При векторном методе решения положить $\overline{CB} = \overline{x}$, $\overline{CD} = \overline{y}$, $\overline{CA_1} = \overline{z}$ и выразить вектор D_1M через вектора $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$.)

4(6). В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$, точки M и N – середины ребер SC и SD соответственно. Прямые SA, BM и CN попарно перпендикулярны. Найти объем пирамиды, если $SA = a$, $BM = b$, $CN = c$.

5(6). Точка E – середина ребра AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром b, точка F лежит на прямой BC. Противоположные ребра правильного тетраэдра расположены на прямых D_1E и A_1F. Найти а) длину отрезка BF, б) ребро правильного тетраэдра. (При координатном методе решения начало координат поместите в точку A, ось Ox направьте по ребру AD, ось Oy – по ребру AB.)

6(6). Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC со сторонами $AB = BC = 15$ и $AC = 18$. Двугранные углы при ребрах AB и BC равны друг другу и равны $arctg\dfrac{1}{7}$, а при ребре AC двугранный угол равен $\dfrac{\pi}{4}$. Сфера, центр которой лежит в плоскости основания, касается боковых граней в точках K, L, M. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SKLM$.

7(6). Найти угол между ребром AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отрезком, соединяющим точку A с центром сферы, вписанной в треугольную пирамиду B_1BCD.

8(6). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ основание ABC – треугольник со стороной $\sqrt{3}$. Расстояние между скрещивающимися ребрами AS и BC равно $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Через точки C, S и середины ребер AC и AB проведена сфера. Найти отношение площади поверхности сферы к площади боковой поверхности пирамиды $SABC$.

9(7). Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\dfrac{3}{2}r$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем первые два касаются нижнего основания цилиндра, а третий шар касается верхнего основания. Найти радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$.

10(7). В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $\dfrac{4}{3}$, точка E – середина ребра AB, а F – точка пересечения медиан грани BCD, причем $EF = 8$. Сфера радиуса $\dfrac{20}{3}$ касается плоскостей ABD и BCD в точках E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$.