§3. Сфера и многоугольники

В прямоугольной системе координат сфера с центром в точке $C\ (x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Задача **11.** $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида. Найти радиус сферы, проходящей через вершину пирамиды S, середину ребра AD, точку M пересечения медиан грани CDS и вершину A, если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 1.

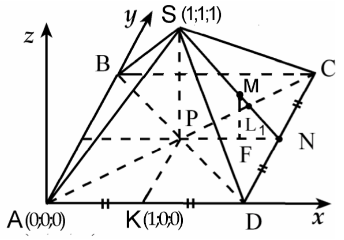

Рис. 16

Δ В основании пирамиды лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, вершина S проектируется в центр основания (рис. 16).

Введем прямоугольную систему координат, выбрав начало координат в точке A, совместив ось x с прямой AD, а ось y – с прямой AB.

Предположим, что уравнение сферы в этой системе координат имеет уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \qquad (6)$$

Ему удовлетворяют координаты точек $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $K\ (1;\ 0;\ 0)$ – середина стороны AD, $S\ (1;\ 1;\ 1)$ и точки M – точки пересечения медиан грани CDS. Если $CN = DN$, то SN – медиана треугольника CDS и $MN = \frac{1}{3}SN$. Пусть $MF \| SP$, тогда $\Delta\, MNF \sim \Delta\, SNP$ и $\frac{MF}{SP} = \frac{FN}{PN} = \frac{MN}{SN}$, откуда $FN = \frac{1}{3}PN = \frac{1}{3}$ и $MF = \frac{1}{3}SP = \frac{1}{3}$. Итак, $M\left(\frac{5}{3};1;\frac{1}{3}\right)$.

Подставим координаты точек A, K, S и M в уравнение (6), получим систему

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R_2; \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = R^2; \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = R^2; \\ \left(a - \frac{5}{3}\right)^2 + (b-1)^2 + \left(c - \frac{1}{3}\right) = R^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем $a = \frac{1}{2}$, вычитая из второго уравнения третье, получим $b + c = 1$, а вычитая из третьего четвертое и подставляя $a = \frac{1}{2}$, получим $c = -\frac{1}{6}$. Итак, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{6}$, $c = -\frac{1}{6}$, из первого уравнения системы находим $R = \frac{\sqrt{59}}{6}$. ▲

Следует отметить, однако, что достаточно просто координатным методом решаются лишь некоторые задачи, а в большинстве задач приходится геометрически определять положение центра.

I. Сфера описана около многоугольника, если она проходит через каждую его вершину (многогранник вписан в сферу). Центр такой сферы равноудален от вершин.

Каждое ребро многогранника – хорда описанной сферы, поэтому *центр описанной сферы – точка пересечения плоскостей, проходящих перпендикулярно ребрам через их середины.*

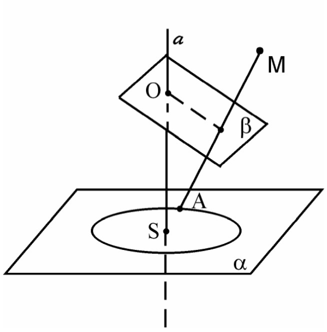

Рис. 17

Каждая грань вписанного многогранника вписана в окружность – сечение сферы плоскостью этой грани. Перпендикуляр из центра сферы на плоскость ее сечения проходит через центр окружности этого сечения.

Значит, *центр описанной сферы принадлежит всем перпендикулярам к граням, проведенным через центры описанных вокруг них окружностей.*

Если окружность лежит в плоскости α, а точка M не принадлежит этой плоскости, то через эту окружность и точку M можно провести сферу.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от всех точек окружности, есть прямая a, проходящая через центр окружности (рис. 17).

Геометрическое место точек, равноудаленных от точки M и некоторой точки A окружности, есть плоскость β, перпендикулярная отрезку MA и проходящая через его середину.

Прямая a и плоскость β не параллельны (иначе точка M лежала бы в плоскости α), они пересекаются. Их точка пересечения – точка O – равноудалена и от точки M, и от всех точек окружности.

Отсюда следует, что *около пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность,* в частности

а) *около любой треугольной пирамиды можно описать сферу,*

б) *около правильной пирамиды можно описать сферу.*

Задача 12. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC, угол C прямой, ребро DA перпендикулярно плоскости ABC (рис. 18). Найти радиус описанной около этого тетраэдра сферы, если $AD = BC = 3$, $AC = 4$.

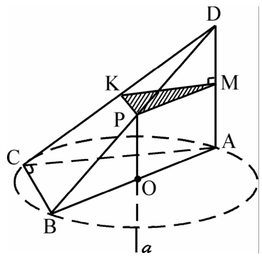

Рис. 18

Δ Центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, лежит на прямой a, перпендикулярной основанию ABC и проходящей через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Так как $\angle ACB = 90°$, то AB – диаметр этой окружности, и центр ее – точка O – середина гипотенузы AB.

Центр сферы, проходящей через точки A и D лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AD перпендикулярно ему. Легко видеть, что эта плоскость и прямая a пересекается в середине ребра BD – точке P. Точка P – центр сферы, ее радиус R равен $\frac{1}{2}BD$.

Находим: $BD^2 = AD^2 + AB^2 = AD^2 + (AC^2 + BC^2) = 34$, значит, $R = \frac{\sqrt{34}}{2}$. ▲

Задача 13. В тетраэдре $ABCD$ ребро AC равно 6, ребро BD равно 8, все остальные ребра равны $\sqrt{74}$ (рис. 19). Найти радиус сферы, описанной около этого тетраэдра.

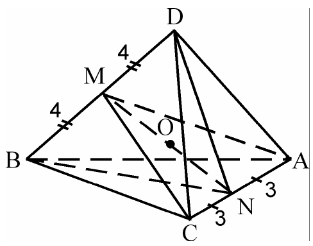

Рис. 19

Δ Пусть M и N – середины противолежащих ребер BD и AC; треугольники ABC и ADC – равные равнобедренные с основанием AC, поэтому $AC \perp BN$, $AC \perp DN$. Отсюда следует, что плоскость BND перпендикулярна ребру AC и проходит через его середину, центр описанной сферы лежит в плоскости BND.

Треугольники BCD и BAD также равные равнобедренные с общим основанием, поэтому $CM \perp BD$, $AM \perp BD$, и плоскость CMA перпендикулярна ребру BD и проходит через его середину. Центр описанной сферы лежит в этой плоскости.

Плоскости BND и CMA пересекаются по прямой MN, центр O сферы лежит на этой прямой. Находим:

$$BN = ND = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{65},$$

$$MN = \sqrt{BN^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = 7.$$

Из прямоугольного треугольника MOD имеем: $MO = \sqrt{R^2 - MD^2} = \sqrt{R^2 - 16}$, а из прямоугольного треугольника $NOC: ON = \sqrt{R^2 - CN^2} = \sqrt{R^2 - 9}$, тогда из $MN = MO + ON$ следует $\sqrt{R^2 - 16} + \sqrt{R^2 - 9} = 7$. Решая уравнение, находим $R = 5$.

Предположение о том, что точка O лежит не на отрезка MN, а на прямой MN вне его, приводит к одному из уравнений:

$$\sqrt{R^2 - 16} - \sqrt{R^2 - 9} = 7, \text{ либо } \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16} = 7.$$

Первое из них не имеет смысла ($\sqrt{R^2 - 16} < \sqrt{R^2 - 9}$), а второе не имеет решений. ▲

II. Биссектором *двугранного угла называется полуплоскость, которая принадлежит этому углу, имеет границей его ребро и разделяет угол на два двугранных угла равной величины.*

Будем рассматривать углы меньше развернутого.

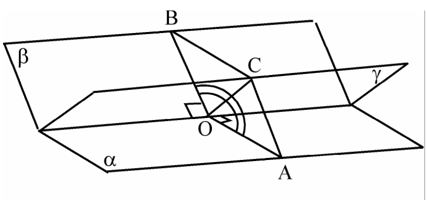

Рис. 20

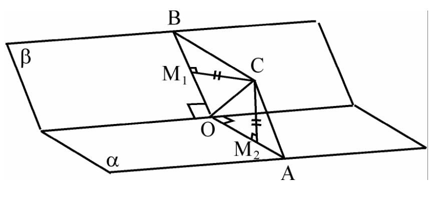

Рис. 21

Биссектриса каждого линейного угла данного двугранного угла принадлежит его биссектору (на рис. 20 биссектор γ содержит биссектрису OC линейного угла AOB). Привило построения биссектора: через ребро угла и биссектрису его линейного угла.

Как и у биссектрисы плоского угла, точки биссектора обладают свойством равноудаленности от граней двугранного угла.

Биссектор двугранного угла есть геометрическое место точек внутри этого угла, равноудаленных от плоскостей его граней (рис.21).

III. Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней. *Центр вписанной сферы равноудален от всех плоскостей граней на расстояние, равное радиусу.*

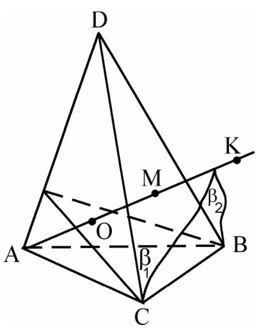

Рис. 22

Следовательно, *центр вписанной сферы принадлежит биссекторам всех двугранных углов многогранника.* Обратно, если существует точка O, общая всем биссекторам, лежащая внутри многогранника, и она удалена от граней на расстояние r, то сфера с центром в точке O и радиуса r касается всех граней многогранника.

В любой тетраэдр можно вписать сферу и только одну.

□ Пусть β_1 – биссектор двугранного угла с ребром AC, а β_2 – биссектор двугранного угла с ребром AB (рис. 22). Эти биссекторы имеют общую точку A, следовательно, пересекутся по некоторому лучу AK. Каждая точка этого луча лежит на β_1 и поэтому равноудалена от плоскостей ACB и ACD, лежит на β_2 равноудалена от плоскостей ABC и ABD. Значит каждая точка луча AK равноудалена от трех граней: ABC, ACD и ABD и луч AK принадлежит биссектору двугранного угла при ребре AD.

Пусть луч AK пересекает грань BCD в точке M. Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC, поэтому биссектор этого угла пересекает отрезок AM. Точка пересечения O лежит на луче AK и равноудалена от граней ABC, ACD, ABD. В то же время расстояния от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, так как точка O принадлежит биссектору двугранного угла, образованного этими плоскостями. Таким образом, точка O равноудалена от всех граней тетраэдра, а сфера с центром в точке O и радиусом, равным расстоянию от точки O до грани тетраэдра, вписана в тетраэдр. Точка O определяется единственным образом. ■

Задача 14. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник ABC, угол C прямой, ребро AD перпендикулярно плоскости ABC (рис. 23). Найти радиус вписанной сферы, если $AD = BC = 3$, $AC = 4$.

Δ По теореме о трех перпендикулярах прямая BC перпендикулярна плоскости ACD (т. к. DA – перпендикуляр к плоскости ABC, прямая BC перпендикулярна проекции AC, следовательно, она перпендикулярна наклонной DC; итак, $\angle BCD = 90°$, $\angle BCA = 90°$, следовательно прямая BC перпендикулярна плоскости ACD). Значит угол DCA – линейный угол двугранного угла при ребре BC и биссектор BCK проходит через биссектрису CK этого линейного угла. Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе.

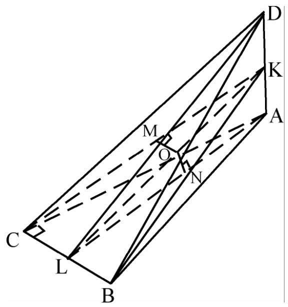

Рис. 23

Далее угол BAC – линейный угол двугранного угла при ребре AD, проводим его биссектрису AL, а затем биссектор ADL. Центр вписанной сферы лежит на этом биссекторе, следовательно, центр сферы лежит на прямой LK пересечения биссекторов BCK и ADL внутри тетраэдра.

Пусть O – центр сферы, точка O лежит на LK, расстояния от точки O до основания ABC и до грани ACD равны (тогда расстояния от точки O до всех граней будут равны).

Если $ON \perp ABC$, то $ON \parallel DA$, следовательно точка N лежит на AL.

Если $OM \perp ACD$, то $OM \parallel BC$, значит точка M лежит на CK. Итак, $ON = OM$.

Из условия следует, что $\Delta CAD = \Delta ACB$, поэтому равны их биссектрисы соответственных углов ACD и CAB и они отсекают на равных сторонах AD и BC равные отрезки $AK = CL$. Отсюда следует, что $\Delta KCL = \Delta LAK$. Значит, $\angle CKL = \angle KLA$. Из этого равенства и из равенства $OM = ON$ следует, что $\Delta MOK = \Delta NOL$. Поэтому и $OK = OL$, т. е. $MO = \frac{1}{2}CL$.

Это и есть искомый радиус.

По свойству биссектрисы в треугольнике ABC биссектриса AL делит сторону BC в отношении $CL : BL = CA : BA = 4 : 5$. Отсюда

$$CL = \frac{4}{9}BC = \frac{4}{3} \text{ и } MO = \frac{2}{3}.$$

Второй способ. Пусть O – центр сферы. Рассмотрим четыре пирамиды с общей вершиной O и основаниями – гранями тетраэдра: ABC, ABD, ACD, BCD. Центр O одинаково удален от всех граней пирамиды на расстояние r, равное радиусу вписанной сферы, т. е. у всех этих пирамид одинаковая высота, равная r. Сумма объемов всех четырех пирамид составляет

$$\frac{1}{3}r\left(S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}\right) = \frac{1}{3}rS_n,$$

(S_n – площадь полной поверхности пирамиды $ABCD$) и равна объему V самой пирамиды $ABCD$, т. е.

$$V = \frac{1}{3}rS_n, \text{ откуда } r = \frac{3V}{S_n}.$$

Объем пирамиды может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{3}AD \cdot S_{ABC}.$$

Имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6, \quad S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot AB = \frac{15}{2},$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot AD = 6, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2}DC \cdot BC = \frac{15}{2}.$$

Итак

$$S_n = 27, V = \frac{1}{3}AD \cdot S_{ABC} = 6, r = \frac{3V}{S_n} = \frac{2}{3}. \ \blacktriangle$$

Замечание. Формула $r = \frac{3V}{S_n}$ верна для любого описанного вокруг сферы радиуса r многогранника и пригодна для определения радиуса этой сферы.

Прямая и сфера могут располагаться тремя способами.

Пусть R – радиус сферы, OK – перпендикуляр из центра сферы на прямую a.

1) Прямая a не пересекает сферу, если $OK > R$.

2) Прямая a касается сферы, если $OK = R$ (прямая проходит через конец радиуса на сфере и перпендикулярна этому радиусу).

3) Прямая пересекает сферу в двух точках, если $OK < R$.

Секущие и касательные к сфере обладают такими же свойствами, как и к окружности, в частности:

а) *если две прямые пересекаются в точке S, и касаются сферы в точках К и L, то* $SK = SL$ (свойство касательных);

б) *если две прямые пересекаются в точке S, одна касается сферы в точке К, другая пересекает сферу в точках M и N, то* $SK^2 = SM \cdot SN$ (теорема о касательной и секущей);

в) *если две прямые пересекаются в точке S, одна из них пересекает сферу в точках M и N, другая – в точках P и Q, то* $SM \cdot SN = SP \cdot SQ$ (точка S может располагаться снаружи (***теорема о секущих***) или внутри сферы (***теорема о пересекающихся хордах***)).