§1. Векторы в пространстве.
Координатный метод решения задач стереометрии

Вектором называется направленный отрезок, и буквально так же, как и на плоскости, определяются основные понятия: абсолютная величина (длина) вектора, равенство векторов, угол между векторами.

Напомним некоторые отличия, связанные с трехмерностью пространства, и важные для приложений понятия и утверждения.

1°. В трехмерном пространстве вектор имеет три координаты: если в прямоугольной декартовой системе координат точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$ – его начало, а точка $A_2(x_2, y_2, z_2)$ – его конец, то координатами вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ называют числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Записывается

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

2°. Арифметические действия – сумма векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и произведение вектора $\vec{a}$ на число λ определяются аналогично двумерному случаю:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2,\ a_3 + b_3),$$

$$\lambda\vec{a} = \vec{d}(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

и сохраняются все свойства этих операций.

3°. Длина вектора $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

4°. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой.

Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно, если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, то векторы коллинеарны.

5°. Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ определяется равенством

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между этими векторами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

(здесь $\vec{a}\vec{b}$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

Отсюда следует, что длина отрезка AB находится по известному вектору $\overrightarrow{AB}$ по формуле

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}.}$$

6°. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0\ .$$

© 2004, ЗФТШ при МФТИ. Составитель Пиголкина Татьяна Сергеевна.

I. Угол между прямыми

Углом между прямыми a и b называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными двум данным. Угол между прямыми измеряется от 0 до 90°. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, лежащие на прямых a и b, и φ – угол между этими прямыми, то

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right|.$$

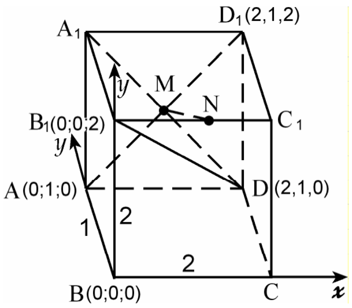


Рис.1

Задача 1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=1$, $AD=2$, $AA_1=2$. Точка M – середина диагонали AD_1 грани AA_1D_1D, точка N – середина ребра B_1C_1. Найти угол, который образует диагональ параллелепипеда B_1D с а) прямой AD_1), б) прямой MN.

Δ Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке B, как показано на рис. 1. Определяем координаты точек B_1, D, A, D_1, M и N и находим координаты векторов $\overrightarrow{B_1D}$, $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{MN}$:

$$B_1(0;0;2),\ D(2;1;0) \Rightarrow \overrightarrow{B_1D} = (2;1;-2);$$
$$A(0;1;0),\ D_1 = (2;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{AD_1} = (2;0;2);$$
$$M(1;1;1),\ N(1;0;2) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0;-1;1)$$

Так как $\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AD_1} = 0$, то $B_1D \perp AD_1$, угол между прямыми B_1D и AD_1 равен 90°.

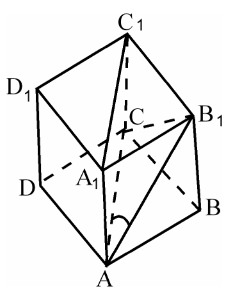
Если φ – угол между прямыми MN и B_1D, то

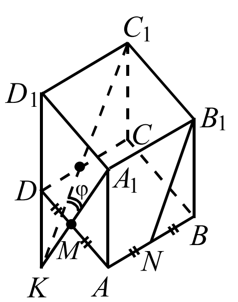
$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{B_1D}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1D}\right|}\right| = \left|\frac{-3}{\sqrt{2}\cdot 3}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

значит прямые MN и BD_1 образуют угол 45^0. ▲

Замечание 1. При координатном методе решения удобно делать большой рисунок и координаты соответствующих точек выписывать на этом рисунке. Как правило, ошибок бывает меньше.

Замечание 2. В ряде задач угол между прямыми в пространстве все же удобнее находить как равный ему угол треугольника, который образуется при параллельном переносе одной прямой до пересечения с другой. Вот два примера с кубом (ребро куба равно a):





а) Угол между прямыми AB_1 и A_1C_1 равен углу CAB_1, т.к. $AC \| A_1C_1$, и равен 60° (ΔAB_1C – правильный).

б) Угол между прямыми A_1M и B_1N (M и N середины ребер) равен углу C_1KA_1 $(C_1K \| B_1N)$, $D_1K = 2a$, $C_1K = A_1K = a\sqrt{5}$, $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, по теореме косинусов $\cos\varphi = \frac{4}{5}$.

II. Расстояние от точки до прямой

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Задача 2. В условиях задачи 1 найти расстояние от точки M до прямой B_1D.

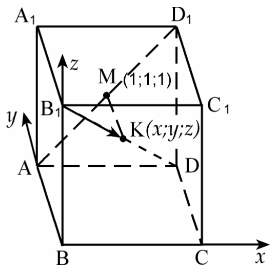


Рис. 2

Δ Предположим, что точка K лежит на прямой B_1D и $MK \perp B_1D$. Требуется найти длину отрезка MK. Пусть $(x; y; z)$ – координаты точки K. Вектор $\overrightarrow{B_1K}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{B_1D}$, т.е. $\overrightarrow{B_1K} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$.

Имеем: $B_1(0;0;2)$, $\overrightarrow{B_1K}(x; y; z-2)$ и $\overrightarrow{BD}(2;1;-2)$. Из равенства, $\overrightarrow{B_1K} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$, т. е. $(x; y; z-2) = \lambda(2;1;-2)$ следует $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z - 2 = -2\lambda$. Вектор $\overrightarrow{MK}(x-1; y-1; z-1)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{B_1D}(2;1;-2)$, их скалярное произведение равно нулю, поэтому

$$2(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0.$$

Подставляем сюда $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 2 - 2\lambda$, находим $\lambda = \frac{5}{9}$, тогда $K\left(\frac{10}{9}; \frac{5}{9}; \frac{8}{9}\right)$ и координаты вектора $\overrightarrow{MK}$ таковы: $x - 1 = 2\lambda - 1 = \frac{1}{9}$, $y - 1 = \lambda - 1 = -\frac{4}{9}$, $z - 1 = (2 - 2\lambda) - 1 = 1 - 2\lambda = -\frac{1}{9}$, $\overrightarrow{MK}\left(\frac{1}{9}; -\frac{4}{9}; -\frac{1}{9}\right)$.

Определим длину вектора $\overrightarrow{MK}$, т. е. расстояние от точки M до прямой B_1D: $\left|\overrightarrow{MK}\right| = MK = \sqrt{\frac{16+1+1}{81}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Заметим, что также определено и положение точки K, известны ее координаты и, например, можно найти $B_1K : B_1D = \frac{5}{9}$. ▲

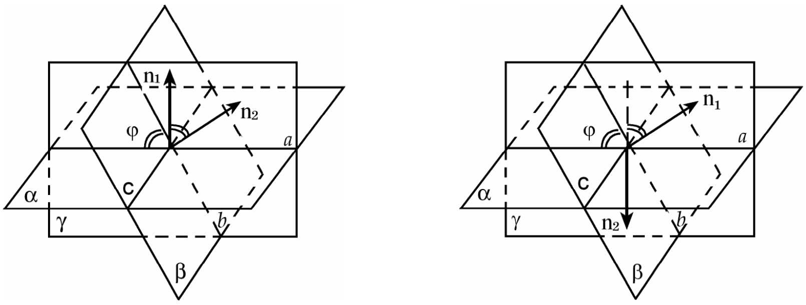
III. Уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Угол между прямой и плоскостью

В прямоугольной системе координат плоскость задается уравнением $ax + by + cz + d = 0$, причем вектор $\vec{n}(a;b;c)$ перпендикулярен этой плоскости (*его называют нормалью к плоскости*).

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(a;b;c)$ в векторной форме имеет вид $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ (здесь $M(x; y; z)$ – произвольная точка этой плоскости), а в координатной форме

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Угол между плоскостями



а) б)

Рис. 3

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c. Плоскость γ перпендикулярна прямой c и пересекает плоскости α и β по прямым a и b. Угол между прямыми a и b называется углом между плоскостями α и β. Как и угол между прямыми, он лежит в диапазоне от 0 до 90°. Угол между плоскостями либо равен углу между векторами, перпендикулярными плоскостям (рис. 3а), либо дополняет его до 180°. В обоих случаях $\cos\varphi = \left|\cos\vec{n}_1 . \vec{n}_2\right|$. Итак, векторы $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ соответственно перпендикулярны плоскостям

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

угол между этими плоскостями определяется из равенства

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n}_1 . \vec{n}_2)\right| = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right|. \qquad (1)$$

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка M – середина ребра AB, точка K – середина ребра DD_1. Найти угол между плоскостями AKB_1 и KMC.

Δ Введем прямоугольную систему координат, поместив начало координат в точку A, как показано на рис. 4.

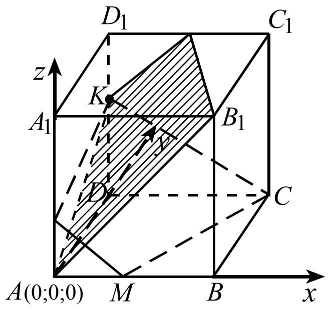


Рис. 4

Составим уравнение плоскости AKB_1. Пусть оно имеет вид

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (2)$$

Точка $A(0;0;0)$ принадлежит этой плоскости, следовательно $d = 0$. Подставим координаты точек $K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$ и $B_1(1;0;1)$ в уравнение (2) при $d = 0$, получим

$$b + \frac{c}{2} = 0 \text{ и } a + c = 0.$$

Таким образом $b = -\frac{c}{2}$, $a = -c$ и уравнение (2) принимает вид $-cx - \frac{c}{2}y + cz = 0.$ Сокращая на c и умножая на (–2), приведем уравнение к виду $2x + y - 2z = 0.$

Составим уравнение плоскости KMC. Пусть оно имеет вид

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0. \qquad (3)$$

Подставляем координаты точек $K\left(0;1;\dfrac{1}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$ и $C(1;1;0)$, получаем систему

$$\begin{cases} b_1 + \dfrac{c_1}{2} + d_1 = 0, \\ \dfrac{a_1}{2} + d_1 = 0, \\ a_1 + b_1 + d_1 = 0. \end{cases}$$

Вычтя из третьего уравнение второе, будем иметь $\dfrac{a_1}{2} + b_1 = 0$, т. е. $b_1 = -\dfrac{a_1}{2}$. Из второго уравнения следует $d_1 = -\dfrac{a_1}{2}$, тогда из первого уравнения получим $c_1 = 2a_1$. Уравнение (3) принимает вид $a_1x - \dfrac{a_1}{2}y + 2a_1z - \dfrac{a_1}{2} = 0$ или $2x - y + 4z = 1$.

Итак, $\vec{n}_1(2;1;-2)$, $|\vec{n}_1| = 3$, $\vec{n}_2(2;-1;4)$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{21}$ и угол между плоскостями AKB_1 и KMC находим из равенства

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right| = \left|\frac{-5}{3\sqrt{21}}\right|,$$

$$\varphi = \arccos\frac{5}{3\sqrt{21}}.$$

Заметим, что для определения угла между плоскостями координатным способом построение сечений не предусматривается. На рис. 4 сечения изображены для полноты картины. ▲

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой, наклоненной к плоскости, и этой плоскостью называется угол между прямой и ее перпендикулярной проекцией на эту плоскость. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними равен 90°, если прямая и плоскость параллельны, угол между ними равен 0.

Пусть прямая a образует с плоскостью α угол φ (рис. 5), $\vec{a}$ – ненулевой вектор, лежащий на прямой a и пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$ равен ψ. Либо $\varphi + \psi = 90^0$ (когда $0 \le \psi \le 90^0$), либо $\psi - \varphi = 90^0$ (когда $90^0 < \psi < 180^0$), но в обоих случаях $\sin\varphi = |\cos\psi|$, т. е.

$$\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right|.$$

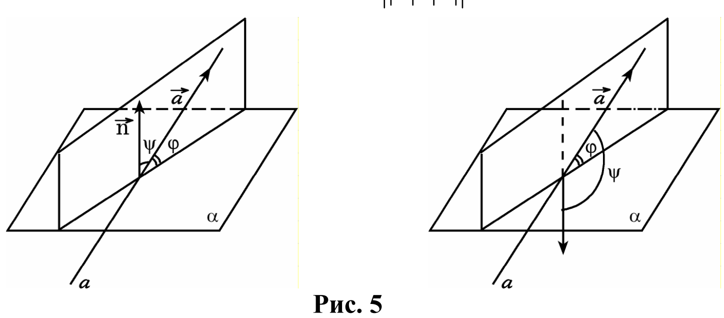


Рис. 5

Итак, если вектор $\vec{n}(a;b;c)$ перпендикулярен плоскости α, то угол φ между этой плоскостью и прямой a, проходящей через точки A и B, определяется из равенства

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}\right|. \qquad (4)$$

Задача 4. В условиях задачи 3 найти угол между прямой KM и плоскостью AKB_1.

Δ Плоскость AKB_1 в рассматриваемой системе координат имеет уравнение вида $2x + y - 2z = 0$, вектор $\vec{n}(2;1;-2)$, $|\vec{n}| = 3$. На прямой KM рассмотрим вектор $\overrightarrow{KM}: K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{KM}\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left|\overrightarrow{KM}\right| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Угол φ между прямой KM и плоскостью AKB_1 находим по формуле

$$\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{KM}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{KM}\right|}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \quad \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \ \blacktriangle$$

IV. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость α параллельна плоскости β, прямая b лежит в плоскости β, точка B лежит на прямой b (рис. 6). Очевидно, что расстояние от точки B до плоскости α равно расстоянию от прямой b до плоскости α и равно расстоянию между плоскостями α и β. Рассмотрим две скрещивающиеся прямые a и b. Проведем через прямую a плоскость α, параллельную прямой b (рис. 7). Через прямую b проведем плоскость, перпендикулярную плоскости α, пусть линия пересечения этих плоскостей b_1 (эта прямая есть проекция прямой b на плоскость α). Точку пересечения прямых a и b_1 обозначим A. Точка A является проекцией некоторой точки B прямой b. Из того, что $AB \perp \alpha$ следует, что $AB \perp a$ и $AB \perp b_1$; кроме того, $b \| b_1$, значит $AB \perp b$. Прямая AB пересекает скрещивающиеся прямые a и b и перпендикулярна и той, и другой.

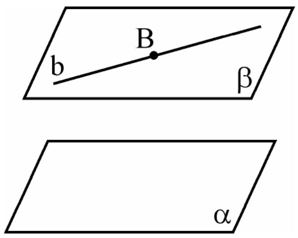


Рис. 6

Отрезок AB называется *общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых a и b.

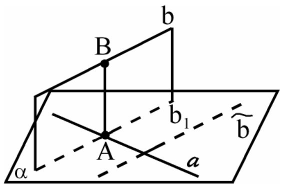


Рис. 7

Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых равна расстоянию между этими прямыми и равна расстоянию от любой точки прямой b до плоскости α. Задача нахождения расстояния между двумя скрещивающимися прямыми не требует построения их общего перпендикуляра и совпадает с задачей определения расстояния от точки до плоскости.

Задача 5. Найти расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Δ

Пусть прямая, проходящая через точку M перпендикулярно плоскости α, пересекает ее в точке K с координатами $(x;y;z)$. Вектор $\overrightarrow{MK}$ перпендикулярен плоскости α, как и вектор $\vec{n}(A;B;C)$, т. е. векторы $\overrightarrow{MK}$ и $\vec{n}$ – коллинеарны, $\overrightarrow{MK}=\lambda\vec{n}.$

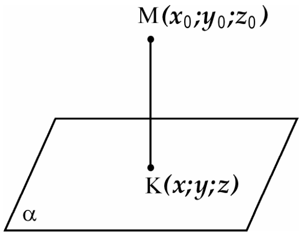


Рис. 8

Так как $\overrightarrow{MK}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ и $\vec{n}(A;B;C)$, то $x-x_0=\lambda A$, $y-y_0=\lambda B$, $z-z_0=\lambda C.$

Точка K лежит в плоскости α, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

Подставляем $x=x_0+\lambda A$, $y=y_0+\lambda B$, $z=z_0+\lambda C$ в уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, получаем

$$A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+C(z_0+\lambda C)+D=0,$$

откуда $\lambda=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}.$

Находим длину вектора $\overrightarrow{MK}$ которая и равна расстоянию от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0: \left|\overrightarrow{MK}\right|=|\lambda\vec{n}|=$ $=|\lambda|\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$

Итак, расстояние h от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ таково

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (5)$$

Например, расстояние h от точки M (2;–3;1) до плоскости

$$x-2y+2z-1=0$$

таково

$$h=\frac{|2-2(-3)+2\cdot1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=3.\ \blacktriangle$$

Задача 6. Ребро куба равно *a*. Найти расстояние между прямыми, на которых лежат скрещивающиеся диагонали двух смежных граней куба.

Δ Рассмотрим, например, прямые, на которых лежат диагонали AC и DC_1 граней куба (рис. 9).

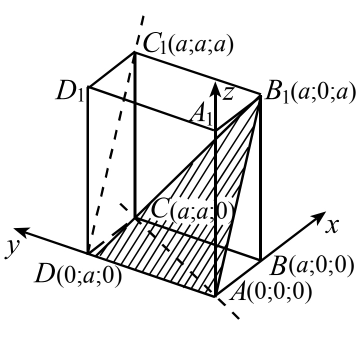


Рис. 9

Диагональ AB_1 грани AA_1B_1B параллельна прямой DC_1, поэтому прямая DC_1 параллельна плоскости AB_1C. Расстояние между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC равно расстоянию от прямой DC_1 до плоскости AB_1C и равно расстоянию от любой точки прямой DC_1 до плоскости AB_1C.

Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке A так, как показано на рис. 9 и вычислим координаты отмеченных точек.

© 2004, ЗФТШ при МФТИ. Составитель Пиголкина Татьяна Сергеевна.

Пусть уравнение плоскости AB_1C (будем также обозначать ее α) $kx+by+cz+d=0$ (не используем букву a, поскольку она обозначает ребро куба).

$$A(0;0;0)\in\alpha \Rightarrow d=0;$$
$$C(a;a;0)\in\alpha \Rightarrow ka+ba=0 \Rightarrow b=-k;$$
$$B_1(a;0;a)\in\alpha \Rightarrow ka+ca=0 \Rightarrow c=-k.$$

Подставляем значения коэффициентов в уравнение плоскости: $kx-ky-kz=0,$ сокращая на $k,$ получим $x-y-z=0.$

Найдем расстояние h от точки $D(0;a;0)$ прямой DC_1 до этой плоскости по формуле (5):

$$h=\frac{|0-a+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

и есть искомое расстояние между скрещивающимися прямыми DC_1 и AC.

Приведем другое решение этой задачи, другой метод определения расстояния от точки (прямой) до плоскости, не используя координаты, но простой и часто применяемый. Он основан на вычислении объема треугольной пирамиды двумя способами. Рассмотрим треугольную пирамиду $AB_1CD.$ Искомое расстояние от точки D до плоскости AB_1C равно высоте h этой пирамиды, опущенной из вершины $D,$ поэтому для пирамиды AB_1CD ее объем $V=\frac{1}{3}S_{AB_1C}h.$

Треугольник AB_1C правильный со стороной $a\sqrt{2},$ его площадь равна $\frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$ Итак, $V=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h.$

Объем V этой же пирамиды легко вычисляется, если в качестве основания рассмотреть грань $ACD,$ так как $S_{ACD}=\frac{1}{2}a^2,$ а высота пирамиды, опущенная из вершины B_1 на плоскость $ACD,$ очевидно, равна $BB_1=a.$ Находим $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2a=\frac{a^3}{6}.$

Из равенства $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h=\frac{a^3}{6}$ определяем $h=\frac{a}{\sqrt{3}}.$ ▲

© 2004, ЗФТШ при МФТИ. Составитель Пиголкина Татьяна Сергеевна.