Федеральное агентство по образованию
Московский физико – технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

Задани №3 для 10-х классов

(2004-2005 учебный год)

г. Долгопрудный, 2004

Составитель: С.П. Коновалов, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 10-х классов (2003-2004 учебный год). - М.: МФТИ, 2004, 19с.

Составитель:
Коновалов Сергей Петрович
Изд. лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано 27.10.04
Формат 60x90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,18
Уч.-изд. л. 1,05. Тираж 2800. Заказ №8-з.

Заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел./факс (095) 485-4227 – **очно-заочное отделение**
тел.409-9583 – **очное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

Комбинаторикой (от латинского combinare – соединять, сочетать) называют раздел математики, в котором изучаются задачи следующего типа: сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из элементов данного множества. Некоторые часто встречающиеся комбинации получили названия, которые, видимо, уже встречались читателю: перестановки, размещения, сочетания.

В этом задании рассматриваются как перечисленные «стандартные» комбинации, так и общие принципы решения комбинаторных задач.

§ 1. Примеры комбинаторных задач и общие принципы комбинаторики.

Пример 1, навеянный сказкой Андерсена «Снежная королева». Помните, когда Герда нашла Кая в чертогах Снежной королевы, тот безуспешно складывал из льдинок слово «вечность» (за решение задачи Каю были обещаны свобода, весь свет и новые коньки). Упростим задачу и представим, что у нас есть набор из восьми карточек с буквами «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь». Вопрос: сколько восьмибуквенных «слов» можно составить из этих карточек? (Здесь и далее под словом понимается некоторая последовательность букв.)

Составление слова из восьми букв можно представить как заполнение буквами клеток следующей таблицы:

1	2	3	4	5	6	7	8

На первое место можно поставить любую из восьми букв, на второе – любую из семи оставшихся и т.д. вплоть до заполнения единственным способом клетки № 8 последней оставшейся буквой. Число способов заполнения таблицы будет равно

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$$

Напомним, что символом $n!$ (читается «эн факториал») обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Ответ: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Наверное, читателя смутила та поспешность, с которой мы завершили решение примера 1, перемножив числа способов заполнения клеток таблицы. Чтобы прояснить этот момент, разберем более общую задачу.

Пусть множество $A = \{a_1, ..., a_m\}$ состоит из m элементов, а множество $B = \{b_1, ..., b_n\}$ – из n элементов. Рассмотрим множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар (a, b), где элемент a принадлежит множеству A, а элемент b принадлежит множеству B (такое множество называется декартовым произведением множеств A и B и обозначается $A \times B$). Иными словами, рассматривается множество, элементами которого являются «карточки» вида

a	b

Слово «упорядоченные» в определении $A \times B$ особенно важно, когда в A и B есть одинаковые элементы. Например, если $A = B = \{а, б, ..., я\}$ – русский алфавит, то элементы $A \times B$ можно считать словами, а $\boxed{а}\boxed{х}$ и $\boxed{х}\boxed{а}$ - разные слова!

Правило произведения: множество $A \times B$ содержит mn элементов.

Доказательство этого утверждения почти очевидно, т.к. все элементы-карточки можно расположить в виде прямоугольной таблицы, в которой m строк и n столбцов.

$\boxed{a_1}\boxed{b_1}$	$\boxed{a_1}\boxed{b_2}$	$\cdots$	$\boxed{a_1}\boxed{b_n}$
$\boxed{a_2}\boxed{b_1}$	$\boxed{a_2}\boxed{b_2}$	$\cdots$	$\boxed{a_2}\boxed{b_n}$
$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$
$\boxed{a_m}\boxed{b_1}$	$\boxed{a_m}\boxed{b_2}$	$\cdots$	$\boxed{a_m}\boxed{b_n}$

Аналогично можно доказать, что множество $A \times B \times C$, состоящее из упорядоченных троек, содержит mnp элементов (p – число элементов в множестве C). Действительно, карточек вида $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c_1}$ столько, сколько элементов в $A \times B$, т.е. mn, столько же карточек вида $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c_2}$ и т.д. В этом случае $A \times B \times C$ можно представить в виде прямоугольного параллелепипеда.

Вообще, множество $A_1 \times A_2 \times ... \times A_p$ состоит из $n_1 n_2 ... n_p$ элементов, где n_1 – число элементов в A_1, n_2 – в A_2 и т.д. Доказывается это утверждение индукцией по p аналогично рассмотренному выше переходу от $p = 2$ к $p = 3$.

Для решения задач комбинаторики удобна следующая формулировка правила произведения.

Пусть объект a_1 можно выбрать n_1 различными способами, после каждого выбора объекта a_1 объект a_2 можно выбрать n_2 различными способами, ..., после каждого выбора объектов a_1, a_2, ..., a_{p-1} объект a_p можно выбрать n_p различными способами. Тогда количество способов, которыми можно выбрать a_1, a_2, ..., a_p равно $n_1 n_2 ... n_p$.

Действительно, если A_k – множество состояний, из которых выбирается объект a_k, то n_k – число элементов множества A_k (k =1,2,..., p), и мы получаем известную нам формулировку правила умножения.

Вернемся к примеру 1. Пусть a_1 – первая буква слова, тогда ее можно выбрать 8 способами, т.е. $n_1 = 8$; вторую букву a_2 можно выбрать 7 способами, т.е. $n_2 = 7$ и т.д. По правилу умножения число всех комбинаций равно

$$8 \cdot 7 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

Замечание. Мы видим, что правило произведения само по себе очень простое. При решении комбинаторных задач с помощью этого правила основная трудность заключается в выборе множества A_k (первая формулировка правила) или объектов a_k (вторая формулировка правила), т.е. в формализации задачи.

Разберем несколько примеров на применение правила произведения.

Пример 2. Сколько четырехбуквенных «слов» можно составить из карточек «в», «е», «ч», «н», «о», «с», «т», «ь»?

Пусть a_k – k-я буква слова (k =1,2,3,4). Тогда $n_1 = 8$, $n_2 = 7$, $n_3 = 6$, $n_4 = 5$ и по правилу произведения сразу получаем ответ: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Ответ: 1680.

Пример 3. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладью так, чтобы они не били друг друга?

Выбор объекта a_1 – поля для белой ладьи – может быть сделан $n_1 = 64$ способами. Независимо от выбора этого поля белая ладья бьет 15 полей, поэтому для черной ладьи остается 64-15 =49 полей: $n_2 = 49$.

Ответ: число расстановок ладей равно $64 \cdot 49 = 3136$.

В разобранной задаче вопрос о том, считаем ли мы ладьи одинаковыми, возникнуть не мог. Но во многих задачах с однородными объектами, приступая к решению, надо ясно представлять, считаются ли эти объекты неразличимыми.

Пример 4. Сколькими способами можно поставить на доску восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

В этой задаче подразумевается (хотя прямо и не говорится), что ладьи одинаковые, неразличимые. Очевидно, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали должна стоять только одна ладья. Будем расставлять ладьи последовательно, начиная с первой горизонтали. На первой горизонтали 8 клеток, и первую ладью можно поставить на любую из них. Когда мы будем ставить вторую ладью, то на второй горизонтали ей будут доступны 7 клеток и т.д. По правилу произведения получаем, что всего таких позиций 8!

Если же считать ладьи различными (как в примере 3), то число перестановок ладей равно

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = (8!)^2$$

Действительно, для первой ладьи можно выбрать любое поле доски размером 8×8, вторая ладья фактически ставится на квадратную доску 7×7 (мы удалили одну горизонталь и одну вертикаль и «сдвинули» оставшиеся части доски) и т.д.

Зафиксируем одну из таких расстановок различных ладей. Число перестановок ладей на выделенных полях равно 8! (результат примера 1). Если мы считаем ладьи одинаковыми, то $(8!)^2$ позиций разбиваются на классы по 8! позиций в каждом, и все позиции данного класса будут одинаковыми. Поэтому число перестановок одинаковых ладей равно $(8!)^2 / 8! = 8!$, что совпадает с ранее полученным ответом.

Второе решение, проведенное в два этапа, в данном случае не является оптимальным, однако бывают ситуации, в которых применение такой схемы становится естественным.

Пример 5. Сколь различных слов можно получить, переставляя буквы слова «комбинаторика»?

В слове «комбинаторика» 13 букв. Если бы все они были различны, то, переставляя их, можно было бы получить 13! слов. Но в нашем слове буквы к, о, и, а встречаются по два раза. Обозначим их $к_1, к_2, о_1, о_2, и_1, и_2, а_1, а_2$. Ясно, что слова, отличающиеся перестановкой букв $к_1$ и $к_2$ – одинаковые, так что 13! Слов разбиваются на пары одинаковых. Следовательно, если мы не различаем $к_1$ и $к_2$, то число всех слов будет равно 13!/2!. Но эта совокупность также разбивается на пары одинаковых с точки зрения буквы “о,, слов и т.д.

Ответ: $\dfrac{13!}{2!2!2!2!} = \dfrac{13!}{16}$.

Пример 6. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные? Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Всего нечетных цифр – пять, поэтому выбор *k*-й цифры числа может быть сделан $n_k = 5$ способами (*k* =1, 2, 3, 4) а количество четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные, равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

Чтобы ответить на второй вопрос, проще не определять последовательно, сколько существует чисел, в записи которых ровно одна четная цифра, две, три, четыре, а воспользоваться полученным ответом на первый вопрос. Все четырехзначные числа, а их 9999-999=9000, делятся на две группы: те, в записи которых все цифры нечетные, и те, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра. Следовательно, количество чисел второго типа равно 9000-625=8375.

Ответ: 8375.

Обратите внимание на идею, которую мы использовали – переход к дополнению изучаемого множества. Это пример применения второго общего правила комбинаторики – **правила суммы.** Приведем это правило в двух формулировках (как и правило произведения):

1) Если множество *A* состоит из *m* элементов, а множество *B* из *n* элементов, причем, эти множества не имеют общих элементов (т.е. $A \cap B = 0$), то их объединение $A \cup B$, т.е. совокупность всех элементов из *A* и *B*, содержит *m* + *n* элементов.

2) Если объект *a* можно выбрать *m* различными способами, а объект *b* можно выбрать *n* различными способами, причем результаты выбора объектов *a* и *b* никогда не совпадают, то выбор “либо *a*, либо *b*» можно осуществить *m* + *n* различными способами.

Часто в задачах приходится применять сразу оба правила комбинаторики.

Пример 7. Сколько различных пар можно образовать из 28 костей домино так, чтобы кости, входящие в пару, можно было приложить друг к другу?

Выбор пары костей – это выбор двух карточек вида $\boxed{a_1 \mid b_1}$, $\boxed{a_2 \mid b_2}$, где можно считать, что $a \le b$. По условию надо найти число всех таких неупорядоченных пар, но ясно, что их вдвое меньше, чем упорядоченных. Нам проще найти число упорядоченных пар, т.к. в этом случае можно применить правило произведения.

Выберем первую кость – это можно сделать 28 способами, из них в 7 случаях кость окажется дублем, т.е. кость вида $\boxed{a \mid a}$, а в 21 случае – кость вида $\boxed{a \mid b}$, $a < b$. В первом случае вторую кость можно выбрать 6 способами, а число способов выбора пары костей по правилу произведения равно $7 \cdot 6 = 42$.

Во втором случае вторую кость можно выбрать 12 способами — 6 костей вида $\boxed{a \mid *}$ и 6 костей вида $\boxed{* \mid a}$,а число способов выбора пары равно $21 \cdot 12 = 252$.

Следовательно по правилу суммы всего получается 42 + 252 = 294 способа выбора упорядоченной пары.

Ответ: 147 пар.

В последней задаче мы опять встретились с новой идеей: переходом от изучения неупорядоченных совокупностей элементов к изучению упорядоченных наборов.

Разберем еще одну важную задачу, в решении которой применяется правило произведения.

Пример 8. Найти число подмножеств множества *A*, состоящего из *n* элементов.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, тогда с каждым подмножеством *X* множества *A* можно связать карточку-паспорт вида

0	1	0	...	1	1
1	2	3		$n-1$	n

В этом паспорте в *к*-й клетке стоит 1, если $a_k \in X$, 0 — если $a_k \notin X$. Ясно, что по каждому подмножеству *X* однозначно строится паспорт, на верно и обратное: каждый паспорт однозначно определяет множество *X*. В частности, паспорт из нулей соответствует пустому множеству, а паспорт из единиц — множеству *A*.

Но число таких паспортов по правилу произведения равно 2^n, т.к. каждая клетка может быть заполнена двумя способами независимо от того, как заполняются другие клетки.

Ответ: 2^n.

В предисловии уже говорилось, что некоторые стандартные схемы в комбинаторике получили свои названия. Среди них самыми важными являются понятия: «размещение», «перестановка» и «сочетание».

§ 2. Размещения и перестановки

Если из множества, содержащего n элементов, каким-то способом выбирают k элементов ($k \le n$), то говорят, что из этого множества *произведена* выборка объема k (все элементы множества считаются различными).

Если нас интересует порядок, в котором выбирались эти элементы, то говорят об упорядоченной выборке, а если нет – о неупорядоченной.

Например, слово из 4 букв в примере 2 — это упорядоченная выборка объема 4, а подмножества в примере 7 — неупорядоченные выборки из подмножества *A*. В то же время мы видели в примерах 5 и 6, что можно переходить от выборки одного вида к выборке другого вида.

Определение. Всякая упорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов* и обозначается через A_n^k.

Символ A_n^k читается: «а из n по k» или «число размещений из n по k». А – первая буква французского слова Arrangement, что обозначает «размещение, приведение в порядок».

Определение. Размещение из n элементов по n называется *перестановкой из n элементов* и обозначается через P_n.

Символ P_n происходит от французского слова Permutation – «перестановка».

В примере 1 мы нашли, что $P_8 = 8!$, с перестановкой мы встречались также в примерах 4 и 5.

В примере 2 с помощью правила умножения было найдено размещение из 8 элементов по 4: $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. В общем случае справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1), \qquad (1)$$

где $1 \le k \le n$.

Доказательство этой формулы получается применением правила произведения. На первое место в выборке можно поместить любой из n элементов, на второе – любой из (n – 1) оставшихся и т.д. После выбора элементов на (k – 1)-е место останется n – (k – 1) = n – k +1 элементов,

		...		
1	2		$k-1$	k

любой из которых можно поместить на k-е место. По правилу произведения получаем

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1).$$

В частности,

$$P_n = A_n^n = n(n-1)... \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad (2)$$

Формулы для A_n^k и P_n легко запоминаются, и их, конечно, надо знать. Но еще важнее знать правило произведения, на основе которого выводятся эти формулы, т.к. многообразие ситуаций в комбинаторике не исчерпываются стандартными комбинациями, и многие задачи можно решить только при условии знания принципов комбинаторики.

Обратим внимание на то, что формулу (1) при $k<n$ можно записать следующим образом:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)\cdot(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (3)$$

Чтобы эта формула действовала и при $k = n$, примем по определению, что $0!=1$.

Возникает вопрос: к формуле (1) мы пришли, применяя правило произведения, а можно ли получить комбинаторными рассуждениями формулу (3)? Ответ: да, можно. Из каждого размещения из n элементов по k можно получить перестановку из n элементов, если в произвольном порядке дописать остальные $(n-k)$ элементов:

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{\ \dots\ }\boxed{}}_{k}\ \underbrace{\boxed{}\boxed{\ \dots\ }\boxed{}}_{n-k}$$

Разные перемещения при любых «добавлениях» будут порождать разные перестановки, а каждое добавление может быть сделано $(n-k)!$ Различными способами. Поэтому по правилу произведения

$$P_n = A_n^k P_{n-k},$$

а это и есть формула (3).

Пример 9. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9 при условии, что цифры в записи числа не повторяются?

Последней цифрой искомого числа может быть 0 или 5. В первом случае остальные пять цифр можно выбирать из множества {1, 2, ..., 9} и число вариантов равно $A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 15120$. Если число оканчивается цифрой 5, то в качестве первой цифры можно взять любую из восьми цифр 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 – нельзя использовать 0, т.к. число должно быть шестизначным. Цифры со второй по четвертую можно выбрать $A_8^4 = 1680$ различными способами. Следовательно, по правилу произведения имеется $8\cdot A_8^4$ чисел, оканчивающихся цифрой 5. По правилу суммы находим, сколько существует чисел, удовлетворяющих условию задачи.

$$A_9^5 + 8\cdot A_8^4 = 28560.$$

Ответ: 28560.

Пример 10. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник Пушкина так, чтобы том 2 стоял рядом с томом 1 и справа от него?

Чтобы решить задачу, проведем мысленный эксперимент: представим себе, что тома 1 и 2 связаны бечевкой. Расстановка полученного набора из 9 томов (восьми обычных и одного сдвоенного) может быть произведена 9! способами.

Ответ: 9!

§ 3. Сочетания

Определение. Всякая неупорядоченная выборка объема k из множества, состоящего из n элементов ($k \le n$), называется *сочетанием из n элементов по k элементов* и обозначается через C_n^k.

Символ C_n^k читается: «це из *n* по *k*» или «число сочетаний из *n* по *k*». С – первая буква французского слова Combinaison – «сочетание».

Выведем формулу для нахождения C_n^k. Из любого набора, содержащего *k* элементов, можно с помощью перестановок получить *k*! Упорядоченных выборок объема *k*, поэтому

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Отметим, что формула (4) справедлива при $k = 0$, т.к. мы условились считать, что 0!=1. Выпишем несколько частных случаев формулы (4):

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Пример 11. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

Вратаря можно выбрать $C_2^1 = 2$ способами, защитников – $C_7^2 = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$ способом, нападающих – $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$ способами. Всего, по правилу произведения, существует $2\cdot 21\cdot 120 = 5040$ способов выбора стартовой шестерки.

Ответ: 5040.

Пример12. На плоскости проведены *n* прямых, среди которых нет ни одной пары параллельных прямых и ни одной тройки прямых, пересекающихся в одной точке. Найти число точек пересечения этих прямых и число треугольников, образованных этими прямыми.

Число точек пересечения прямых равно числу способов выбора неупорядоченной пары прямых, т.е. C_n^2. Аналогично, каждый треугольник определяется тройкой прямых, поэтому общее число треугольников равно C_n^3.

Ответ: C_n^2 и C_n^3.

Пример 13. Для проведения письменного экзамена по комбинаторике надо составить 4 варианта по 7 задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на 4 варианта?

Задачи для первого варианта можно выбрать C_{28}^7 способами. После этого останется 21 задача, так что второй вариант можно составить C_{21}^7 способами. Для третьего варианта задачи можно выбрать C_{14}^7 способами, а для четвертого – $C_7^7 = 1$ способом.

По правилу произведения получаем число $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_{14}^7$. Но так как варианты равноправны, то полученное число надо разделить на 4!

Ответ: $\frac{1}{4!}C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_{14}^7 = \frac{28!}{4!(7!)^4}$.

Отметим, что полученное число имеет порядок 10^{13}; число *n*! С ростом *n* растет очень быстро: например, если 10! = 3 628 800, то 20! = 2 432 902 008 176 640 000.

С точки зрения теории множеств C_n^k – это число всех подмножеств из *k* элементов, которые можно выбрать из множества, состоящего из *n* элементов. Поэтому равенство $C_n^0 = 1$ означает, что всякое пустое подмножество только одно; $C_n^1 = n$ – что число одноэлементных подмножеств равно n и т.д.

Этот взгляд на числа C_n^k позволяет найти комбинаторный смысл следующих арифметических свойств чисел C_n^k:

1°. $C_n^k = C_n^{n-k}$, если $0 \le k \le n$;

2°. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$, если $0 \le k \le n+1$;

3°. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Свойство 1° сразу получается из формулы (4):

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k,$$

но ясен и его комбинаторный смысл. Выбрав множество из k элементов, мы одновременно получаем подмножество из (n - k) элементов. Например, если из n учеников класса выбирают k человек для поездки на олимпиаду в Москву, то однозначно определяются (n – k) таких, которые в Москву не поедут, и наоборот.

Свойство 2° также легко доказывается, если воспользоваться формулой (4):

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!((n-k)+(k+1))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Комбинаторный смысл свойства 2° выясняется с помощью правила суммы. Предположим, что в классе из n учеников появился новый ученик, и на олимпиаду в Москву решили отправить команду из k + 1 человек. Все такие команды можно разделить на две группы: те команды, в которые входит новичок, и те, в которые он не входит. Число команд в первой группе равно C_n^k – надо дополнить команду k учениками, выбрав их из n оставшихся, а во второй группе число команд равно C_n^{k+1}. Следовательно, $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Свойство 2° позволяет последовательно находить числа C_n^k. В самом деле,

$$C_1^0 = C_1^1 = 1.$$

$$C_2^0 = C_2^2 = 1, \quad C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 2,$$

$$C_3^0 = C_3^3 = 1, \quad C_3^1 = C_2^0 + C_2^1 = 3, \quad C_3^2 = C_2^1 + C_2^2 = 3,$$

$$C_4^0 = C_4^4 = 1, C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 4, C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 6, C_4^3 = C_3^2 + C_3^3 = 4$$

и т.д. Если принять соглашение, что $C_0^0 = 1$, то все числа C_n^k можно расположить на плоскости в виде бесконечной таблицы, которая называется треугольником Паскаля:

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0 = 1 \qquad C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = 1 \qquad C_2^1 = 2 \qquad C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1 \qquad C_3^1 = 3 \qquad C_3^2 = 3 \qquad C_3^3 = 1$$

$$\ldots$$

В этой таблице в строке с номером n (n = 1, 2, ...) каждое число (кроме двух крайних) равно сумме двух «соседних» с ним чисел строки с номером n - 1.

Приведем аналитическое доказательство свойства 3°, основанное на свойствах треугольника Паскаля. Положим

$$S_n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n .$$

Так как каждое число строки с номером n входит в качестве слагаемого в два соседних числа следующей строки, то $S_{n+1} = 2S_n$. Следовательно, $S_{n+1} = 2S_n = 2^2 S_{n-1} = \cdots = 2^{n+1} S_0 = 2^{n+1}$, т.к. $S_0 = 1$.

Другое – комбинаторное – доказательство свойства 3° фактически было получено в примере 8. Там было найдено, что число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n. С другой стороны, как мы уже отмечали, C_n^k – это число всех подмножеств, состоящих из k элементов, поэтому число всех подмножеств равно (правило суммы)

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n .$$

Следовательно, $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

§ 4. Бином Ньютона

Школьникам хорошо известны формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{и} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 .$$

А можно ли при каждом натуральном n найти аналогичную формулу для $(a+b)^n$? Такая формула существует и по традиции называется «биномом Ньютона», хотя была известна математикам еще в средние века. Биномом называется выражение $a+b$ (буквальный перевод: две части).

Справедлива следующая формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n . \qquad (5)$$

Доказательство. Если, не приводя подобные члены, перемножить n скобок $(a+b)$, то получится сумма, состоящая из слагаемых вида $a^{n-k} b^k$, $k = 0, 1, ..., n.$ Для данного k слагаемое $a^{n-k} b^k$ получается только в том случае, если в каких-то k скобках мы возьмем b, а остальных $(n-k)$ скобках – a. Следовательно, число слагаемых вида $a^{n-k} b^k$ будет равно числу способов, которыми можно выбрать (без учета порядка выбора) k скобок из n скобок, т.е. C_n^k. Утверждение доказано.

Замечание. Числа C_n^k часто называют биномиальными коэффициентами. Отметим, что биномиальные коэффициенты в формуле (5) составляют строку с номером n в треугольнике Паскаля.

Если в формуле (5) взять $a = b = 1$, то получится известное нам свойство 3° чисел C_n^k, а если взять $a = 1, b = -1$, то получим еще одно комбинаторное равенство:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Формула бинома Ньютона производит сильное впечатление и попала даже в художественную литературу.

Лев Толстой в автобиографии «Детство. Отрочество. Юность» описывает паническое состояние героя Николая Иртеньева, которому на экзамене в университете достался билет с биномом Ньютона.

У Конан Дойля Холмс так описывает Ватсону профессора Мориарти: «Когда ему исполнился двадцать один год, он написал трактат о биноме Ньютона, завоевавший ему европейскую известность».

Можно вывести формулу, аналогичную формуле бинома, позволяющую находить степени большого числа слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_s=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}, \qquad (6)$$

где суммирование производится по всем всевозможным наборам неотрицательных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_s$, сумма которых равна n. Коэффициент $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}$ напоминает ответ в примере 5, и действительно, число слагаемых вида $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}$, равно числу «слов», которые можно составить из n букв, среди которых k_1 «букв» a_1, k_2 «букв» a_2 и т.д.

Формула (6) называется *полиномиальной.* Например,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + B^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$$

Рассмотрим в заключение несколько задач, связанных с формулой биному Ньютона.

Пример 14. Найти n, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.

В n-й строке треугольника Паскаля два коэффициента равны в том и только том случае, когда они занимают клетки, равноудаленные от крайних. Действительно, треугольник Паскаля симметричен: $C_n^k = C_n^{n-k}$, а при движении от края к середине строки коэффициенты возрастают: $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \frac{n-1}{2}$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \frac{n-1}{2}$. Следовательно, C_n^5 равно C_n^{12} тогда и только тогда, когда $12 = n - 5$, т.е. $n = 17$.

Ответ: $n = 17$.

Пример 15. Найти коэффициент при x^{19} в разложении $(1 + x^5 + x^9)^{30}$.

Решим задачу двумя способами.

1) В силу формулы (6)

$$(1 + x^5 + x^9)^{30} = \sum_{k_1+k_2+k_3=30} \frac{30!}{k_1!k_2!k_3!} 1^{k_1} x^{5k_2} x^{9k_3}.$$

Так как уравнение $5k_2 + 9k_3 = 19$ имеет только одно решение в неотрицательных числах $k_2 = 2,\ k_3 = 1$, то коэффициент при x^{19} равен

$$\frac{30!}{27!2!1!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{2} = 12180.$$

2) Обозначим через $y = x^5(1 + x^4)$. Тогда

$$(1 + x^5 + x^9)^{30} = (1+y)^{30} = 1 + C_{30}^1 y + \cdots + C_{30}^k y^k + \cdots + y^{30}.$$

Рассмотрим k-е слагаемое ($0 \le k \le 30$):

$$C_{30}^{k} y^{k} = C_{30}^{k} x^{5k} (1 + x^{4})^{k} = C_{30}^{k} x^{5k} (1 + C_{k}^{1} x^{4} + \cdots + C_{k}^{m} x^{4m} + \cdots x^{4k}).$$

Такое слагаемое будет содержать x^{19}, если для некоторого m выполняется равенство $5k + 4m = 19$. Ясно, что это возможно только при $k = 3$ и $m = 1$. Следовательно, коэффициент при x^{19} равен $C_{30}^{3} C_{3}^{1} = 12180$.

Литература

1. Кутасова А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х., Пособие по математике для поступающих в вузы. /под ред. Г.Н. Яковлева — М.: Наука, 1988.

2. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.

3. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. — Киров, 1994.

Контрольные вопросы

1. Сколькими способами можно составить пароль, состоящий из шести различных цифр?

2. Сколько делителей, кратных 6, у числа $2^2 3^3 5^5$?

3. Сколько диагоналей в выпуклом 2005-угольнике?

4. Сколько решений в натуральных числах имеет система

$$\begin{cases} a + b = 2004, \\ c + d = 2005\ ? \end{cases}$$

5. С помощью соответствующей строки треугольника Паскаля выпишите формулу для вычисления $(a - b)^6$.

Задачи

1(3). Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «программист»?

2(3). Сколькими способами можно переставлять буквы слова «сочетание», чтобы две буквы «е» не шли подряд?

3(3). Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с n точками, расположенными на боковой стороне, противолежащей этой вершине. На сколько частей делят треугольник эти прямые?

4(4). Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы они не били друг друга?

5(4). Известно, что никакие три диагонали выпуклого девятиугольника не пересекаются в одной точке. Найдите число точек пересечения диагоналей.

6(5). Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы две тройки?

7(5). Докажите тождество: $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

8(6). Сколькими способами можно распределить 15 различных задач между пятью школьниками так, чтобы каждый получил три задачи?

9(6). Сколькими способами можно распределить 15 одинаковых листов бумаги между пятью школьниками так, чтобы каждому школьнику достался хотя бы один лист?
В задачах №8 и №9 школьники разные!

10(6). В выпуклом девятиугольнике проведены все диагонали, причем известно, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. На сколько частей разделится девятиугольник?

11(6). Найдите наибольший коэффициент многочлена $(2+x)^{10}$.

12(6). Найдите коэффициент при x^2 в разложении $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)^6$.

