§ 4. Бином Ньютона

Школьникам хорошо известны формулы
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

А можно ли при каждом натуральном *n* найти аналогичную формулу для $(a+b)^n$? Такая формула существует и по традиции называется «биномом Ньютона», хотя была известна математикам еще в средние века. Биномом называется выражение $a+b$ (буквальный перевод: две части).

Справедлива следующая формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n. \qquad (5)$$

Доказательство. Если, не приводя подобные члены, перемножить *n* скобок $(a+b)$, то получится сумма, состоящая из слагаемых вида $a^{n-k}b^k$, $k = 0, 1, \ldots, n.$ Для данного *k* слагаемое $a^{n-k}b^k$ получается только в том случае, если в каких-то *k* скобках мы возьмем *b*, а остальных $(n-k)$ скобках – *a*. Следовательно, число слагаемых вида $a^{n-k}b^k$ будет равно числу способов, которыми можно выбрать (без учета порядка выбора) *k* скобок из *n* скобок, т.е. C_n^k. Утверждение доказано.

Замечание. Числа C_n^k часто называют биномиальными коэффициентами. Отметим, что биномиальные коэффициенты в формуле (5) составляют строку с номером *n* в треугольнике Паскаля.

Если в формуле (5) взять $a = b = 1$, то получится известное нам свойство 3° чисел C_n^k, а если взять $a = 1, b = -1,$ то получим еще одно комбинаторное равенство:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Формула бинома Ньютона производит сильное впечатление и попала даже в художественную литературу.

Лев Толстой в автобиографии «Детство. Отрочество. Юность» описывает паническое состояние героя Николая Ирентьева, которому на экзамене в университете достался билет с биномом Ньютона.

У Конан Дойля Холмс так описывает Ватсону профессора Мориарти: «Когда ему исполнился двадцать один год, он написал трактат о биноме Ньютона, завоевавший ему европейскую известность».

Можно вывести формулу, аналогичную формуле бинома, позволяющую находить степени большого числа слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_s!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}, \qquad (6)$$

где суммирование производится по всем всевозможным наборам неотрицательных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_s$, сумма которых равна *n*. Коэффициент $\dfrac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_s!}$ напоминает ответ в примере 5, и действительно, число слагаемых вида $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}$, равно числу «слов», которые можно составить из *n* букв, среди которых k_1 «букв» a_1, k_2 «букв» a_2 и т.д.

Формула (6) называется *полиномиальной.* Например,

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + B^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$$

Рассмотрим в заключение несколько задач, связанных с формулой биному Ньютона.

Пример 14. Найти *n*, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.

В n-й строке треугольника Паскаля два коэффициента равны в том и только том случае, когда они занимают клетки, равноудаленные от крайних. Действительно, треугольник Паскаля симметричен: $C_n^k = C_n^{n-k}$, а при движении от края к середине строки коэффициенты возрастают: $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \frac{n-1}{2}$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \frac{n-1}{2}$. Следовательно, C_n^5 равно C_n^{12} тогда и только тогда, когда $12 = n - 5$, т.е. $n = 17$.

Ответ: $n = 17$.

Пример 15. Найти коэффициент при x^{19} в разложении $(1 + x^5 + x^9)^{30}$.

Решим задачу двумя способами.

1) В силу формулы (6)

$$(1 + x^5 + x^9)^{30} = \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = 30} \frac{30!}{k_1! k_2! k_3!} 1^{k_1} x^{5k_2} x^{9k_3}.$$

Так как уравнение $5k_2 + 9k_3 = 19$ имеет только одно решение в неотрицательных числах $k_2 = 2,\ k_3 = 1$, то коэффициент при x^{19} равен

$$\frac{30!}{27!2!1!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{2} = 12180.$$

2) Обозначим через $y = x^5(1 + x^4)$. Тогда

$$(1 + x^5 + x^9)^{30} = (1 + y)^{30} = 1 + C_{30}^1 y + \cdots + C_{30}^k y^k + \cdots + y^{30}.$$

Рассмотрим k-е слагаемое ($0 \le k \le 30$):

$$C_{30}^k y^k = C_{30}^k x^{5k} (1 + x^4)^k = C_{30}^k x^{5k} (1 + C_k^1 x^4 + \cdots + C_k^m x^{4m} + \cdots x^{4k}).$$

Такое слагаемое будет содержать x^{19}, если для некоторого m выполняется равенство $5k + 4m = 19$. Ясно, что это возможно только при $k = 3$ и $m = 1$. Следовательно, коэффициент при x^{19} равен $C_{30}^3 C_3^1 = 12180$.