

**Министерство образования Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа**

МАТЕМАТИКА

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Задание №5 для 10-х классов

(2003-2004 учебный год)



г. Долгопрудный, 2004

Составитель: М.В. Балашов, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №5 для 10-х классов (2003-2004 учебный год).
- М.: МФТИ, 2004, 32с.

Составитель:
Балашов Максим Викторович

Изд.лиц. №040060 от 21.08.96г. Подписано в печать 12.01.04
Формат 60х90 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 2,0
Уч.-изд.л. 1,77. Тираж 2400 экз. Заказ 10-з.

Заочная физико-техническая школа
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Москов. обл., г.Долгопрудный, Институтский пер.,9
ЗФТШ при МФТИ, тел/факс (095) 408-5145 – **заочное отделение**
тел/факс (095) 485-42-27– **очно-заочное отделение**

E.mail: zftsh@pop3.mipt.ru
Наш сайт: www.school.mipt.ru

©Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2004
©Заочная физико-техническая школа, 2004
©Балашов М.В.,2004

§ 1. Параллельность прямых и плоскостей

Определение параллельных прямых, параллельной прямой и плоскости, параллельных плоскостей приведены в школьном учебнике геометрии. В дополнение к материалу учебника приведем некоторые теоремы, часто используемые при решении многих задач по стереометрии.

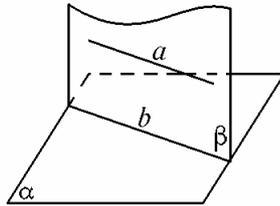


Рис. 1

□ Пусть плоскость β пересекает плоскость α по прямой b и проходит через прямую a такую, что $a \parallel \alpha$ (рис.1). Тогда a и b лежат в плоскости β и не пересекаются, иначе точка их пересечения принадлежала бы плоскости α , что противоречит параллельности a и α , следовательно, $a \parallel b$.

Теорема 1. (теорема о линии пересечения). Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Теорема 2. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

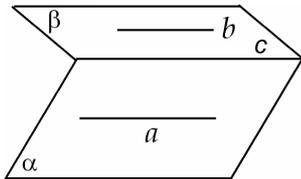


Рис. 2

□ Пусть $a \parallel b$, где $a \subset \alpha, b \subset \beta$, причем $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 2). Докажем, что $c \parallel a$ и $c \parallel b$. Действительно, поскольку $b \subset \beta$ и $a \parallel b$, то $a \parallel \beta$ по признаку параллельности прямой и плоскости. По теореме о линии пересечения $c \parallel a$. Аналогично доказывается, что $c \parallel b$.

Теорема 3. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

□ Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a , а прямая b параллельна плоскостям α и β . Возьмем на прямой a точку M и проведем плоскость γ через b и M (рис. 3). Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a_1 , а плоскость β – по прямой a_2 . По теореме о линии пересечения $a_1 \parallel b$ и $a_2 \parallel b$. Но прямые a_1 и a_2 имеют общую точку M , следовательно, это одна и та же прямая a (так как $a_1 \in \alpha, a_2 \in \beta$). Итак, $a \parallel b$.

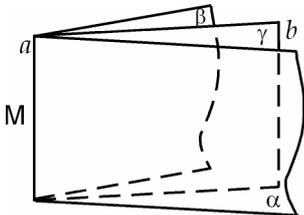


Рис. 3

Пример 1. Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны.

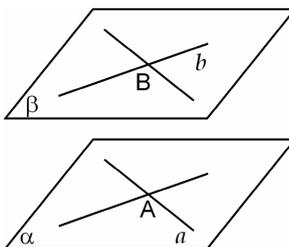


Рис. 4

□ Пусть прямые a и b скрещиваются. Возьмем на прямой a точку A и проведем через нее прямую, параллельную прямой b (в плоскости, проходящей через A и b). Через a и построенную прямую проведем плоскость α . Аналогично строим плоскость β (рис. 4). По признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \beta$.

Приведенное построение часто оказывается полезным при решении многих задач о скрещивающихся прямых, поэтому следует его за-

ПОМНИТЬ.

§ 2. Об изображении фигур в стереометрии

Чертежи, которыми сопровождаются решения стереометрических задач, должны быть выполнены с учетом свойств параллельного проектирования (эти свойства изложены в школьном учебнике). Точнее говоря, каждый чертеж обязан представлять собой *изображение*, т.е. фигуру, подобную параллельной проекции рассматриваемой пространственной конфигурации на некоторую плоскость. При выполнении чертежа необходимо учитывать также естественное требование о наглядности изображения.

а) Изображение плоских многоугольников

Справедливо следующее утверждение: *изображением данного треугольника может служить любой треугольник.*

Для изображения плоского многоугольника выделяют в нем три вершины: A_1, A_2, A_3 . Затем строят изображение треугольника $A_1A_2A_3$ в виде произвольного треугольника. Изображения остальных вершин многоугольника строятся уже однозначно согласно правилам параллельного проектирования.

Пример 2. Построить изображение квадрата $ABCD$.

□ Построим изображение треугольника ABC – произвольный

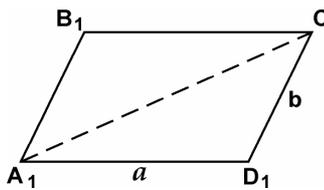


Рис. 5

треугольник $A_1B_1C_1$. Так как *при параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные*, то точка D_1 – изображение вершины D – является точкой пересечения прямых a и b , проходящих соответственно через точки A_1 и C_1 параллельно прямым B_1C_1 и A_1B_1

соответственно (рис.5). Построение точки D_1 завершает решение задачи.

б) Изображение многогранников

Справедливо следующее утверждение (теорема Польке – Шварца): **изображением данного тетраэдра может служить любой четырехугольник с проведенными в нем диагоналями** (не обязательно выпуклый). Для изображения многогранника выделяют в нем четыре вершины: A_1, A_2, A_3, A_4 . Затем строят изображение тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ – произвольный четырехугольник с проведенными в нем диагоналями. Изображения остальных вершин многогранника строятся уже однозначно.

Пример 3. Построить изображение параллелепипеда.

□ Любая вершина параллелепипеда и три вершины, соединенные с ней ребрами, являются вершинами тетраэдра. Его изображение – произвольный четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ с проведенными в нем диагоналями (на рис.6 он не выпуклый). Как и в примере 2, изображением

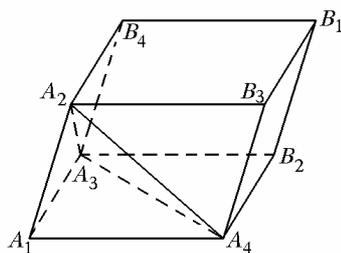


Рис. 6

любой грани параллелепипеда является параллелограмм, следовательно, $A_1A_3B_2A_4A_2B_4B_1B_3$ – искомое изображение.

Пример 4. Построить изображение правильной шестиугольной пирамиды.

□ Если $SABCDEF$ – данная пирамида, то в основании лежит правильный шестиугольник и высота SD попадает в его

центр. Построим вначале произвольный четырехугольник $S_1A_1E_1C_1$ – изображение тетраэдра $SAEC$ (рис.7). Для правильного шестиугольника $ABCDEF$ точка O является точкой пересечения медиан треугольника ACE (рис.8). В то же время, при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, поэтому точка M , середина AC , проектируется в точку M_1 – середину отрезка A_1C_1 , а точка O , делящая отрезок EM в отношении 2:1, считая от точки E , проектируется в точку O_1 , делящую отрезок E_1M_1 в том же отношении. Значит, O_1 – точка пересечения медиан треугольника $A_1C_1E_1$, и мы ее можем построить. Наконец,

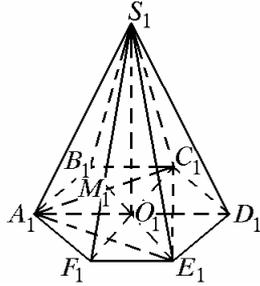


Рис. 7

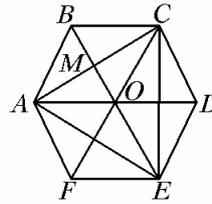


Рис. 8

точки D, F и B симметричны точкам A, C и E относительно точки O , поэтому точки D_1, F_1, B_1 симметричны точкам A_1, C_1, E_1 относительно O_1 .

§ 3. Сечения многогранников

Если пересечением многогранника и плоскости является многоугольник, то он называется *сечением* многогранника указанной плоскостью (*секущей плоскостью*).

Мы будем заниматься решением следующей задачи: на данном изображении многогранника построить его сечения данной плоскостью.

По сложившейся традиции, мы будем далее писать «построить сечение многогранника», опуская слово «изображение». Кроме того, вершины изображения многоугольника мы будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие вершины оригинала. В формулировке нашей задачи мы не указали способ задания секущей плоскости. Это можно сделать по-разному, например, тремя точками, не лежащими на одной прямой, двумя точками и условием параллельности некоторой прямой, точкой и условием параллельности некоторой плоскости и т.п.

Сначала рассмотрим самый простой случай, когда секущая плоскость задана тремя точками, две из которых лежат в плоскости одной грани многогранника, а третья – в плоскости грани, смежной с первой. В этом случае, как правило (если не возникает параллельности некоторых прямых, на чем мы ниже остановимся особо), для обоснования построения не приходится выходить за рамки аксиом и, быть может, простейших следствий из них. Приведем характерный пример.

Пример 5. Построить сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M (рис.9 а); $K \in (ABC)$, $L \in (ABC)$, $M \in (ASC)$.

□ Для решения поставленной задачи построим линии пересечения секущей плоскости с гранями тетраэдра. Предположим, что плоскость

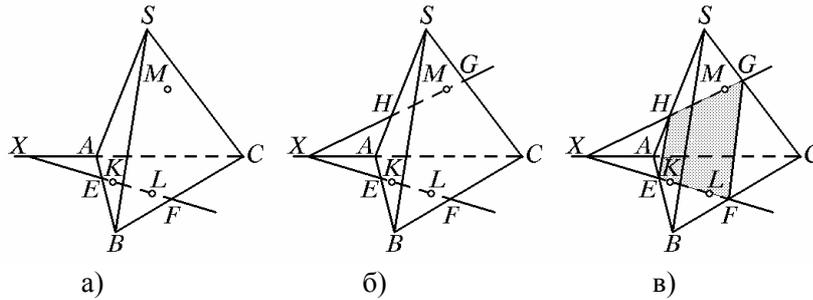


Рис. 9

KLM (которую обозначим α) построена. Так как плоскости α и (ABC) имеют общую точку K , то они пересекаются по прямой, проходящей через точку K , а раз эти плоскости имеют еще одну общую точку – точку L , то прямая KL является линией пересечения плоскостей α и ABC . Отсюда вытекает следующее построение: проведем прямую KL до пересечения с отрезками AB и BC в точках E и F (рис. 9б). Пусть эта прямая пересекает прямую AC в точке X . Будем рассуждать аналогично: точки X и M лежат как в плоскости α , так и в плоскости (ASC) , следовательно, прямая XM – их линия пересечения, поэтому строим прямую XM до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G (рис. 9в). Повторяя рассуждения по той же схеме, делаем вывод о том, что плоскости α и (ASB) пересекаются по прямой EH , а плоскости α и (BSC) – по прямой FG . Поэтому для завершения построения остается соединить точку E с точкой H и точку F с точкой G (рис. 9в).

Что же изменится в приведенных рассуждениях, если прямые KL и AC окажутся параллельными? В этом случае придется воспользоваться теоремами о параллельности в пространстве. Так как прямая KL параллельна прямой AC , лежащей в плоскости (ASC) , то по признаку параллельности прямой и плоскости прямая KL параллельна плоскости (ASC) . Но плоскость α проходит через прямую KL , следовательно (теорема о линии пересечения), линия пересечения плоскостей α и ASC должна быть параллельна прямой KL . Поэтому строим через точку M прямую, параллельную KL , до пересечения с отрезками SA и SC в точках H и G . Соединив точки H и E , а также G и F , получим искомое сечение (рис. 10).

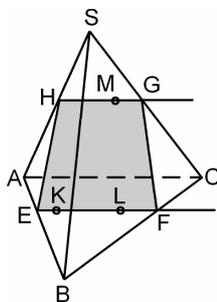


Рис. 10

Мы видим, что проведенное построения сечения в обоих случаях было основано на нахождении линий пересечения секущей плоскости с плоскостями грани многогранника – так называемых *следов* секущей плоскости на плоскостях граней. Отсюда и происходит название метода построения сечений, который мы только что проиллюстрировали, – «метод следов». Приведем теперь пример использования для обоснования построения сечения теоремы о линиях пересечениях двух параллельных плоскостей третьей плоскостью. Эту теорему довольно естественно использовать, когда речь идет о сечениях многогранников, имеющих параллельные грани: призм, параллелепипедов, кубов и т. д.

Пример 6. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L, M (рис.11а), где $K, L \in (ABC)$, $M \in (A_1B_1C_1)$.

□ Сначала построим прямую KL – линию пересечения плоскостей KLM и ABC . Пусть эта прямая пересекает отрезки AB и CD в точках P_1 и P_2 . Для того, чтобы построить след секущей плоскости на плоскость

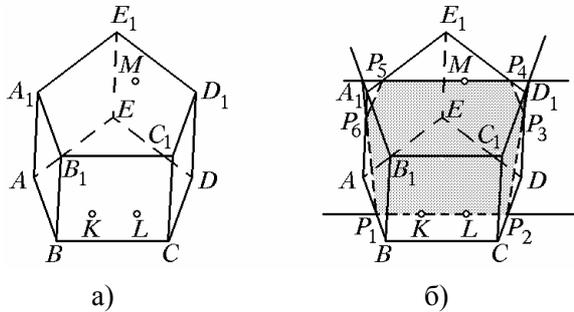


Рис. 11

через точку M). Строим прямую, проходящую через точку M параллельно прямой KL до пересечения с отрезками A_1E_1 и E_1D_1 в точках P_5 и P_4 . Дальнейшее построение аналогично построению примера 5. Сечение изображено на рис. 11б.

Теоремы о параллельности в пространстве применяют и в случае, когда одним из условий задания секущей плоскости является ее параллельность некоторой прямой, некоторой плоскости или двум скрещивающимся прямым. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 7. Построить сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α , проходящей через точку O пересечения диагоналей AC_1 и CA_1 параллельно плоскости $\beta = (AB_1C)$. Найти отношение площадей сечений призмы плоскостями α и β .

□ По условию $\alpha \parallel \beta$, поэтому α и β пересекают грани призмы по параллельным прямым. Следовательно, α пересекает грань AA_1C_1C по отрезку KL , где K и L – середины ребер CC_1 и AA_1 соответственно (рис. 12), так как $KL \parallel AC$ и KL проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма AA_1C_1C . Аналогично, α пересекает грань AA_1B_1B по отрезку LM , где M – середина ребра A_1B_1 . Аналогично, α пересекает ребро B_1C_1 в его середине N . Сечение – трапеция $KLMN$ ($MN \parallel A_1C_1 \parallel KL$).

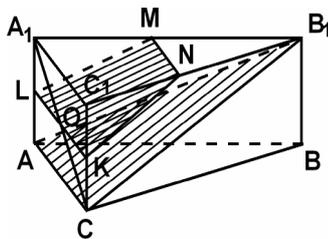


Рис. 12

Как мы доказали, $LM \parallel AB_1$ и $LK \parallel AC$, поэтому $\angle MLO = \angle B_1AC$, кроме того, $ML : B_1A = OL : CA = 1 : 2$. Следовательно, треугольники MLO и B_1AC подобны с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. Отсюда высота h_1 , опущенная из точки M на OL в два раза меньше высоты h , опущенной из точки B_1 на CA . Значит,

$$\frac{S_\alpha}{S_\beta} = \left(\frac{1}{2} h_1 (MN + KL) \right) : \left(\frac{1}{2} h \cdot CA \right) = \frac{3}{4}.$$

Пример 8. Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью α , проходящей через точки C и M параллельно ребру SD , где M – середина ребра DA . Определить, в каком отношении плоскость α делит высоту пирамиды, а также ребра, которые она пересекает.

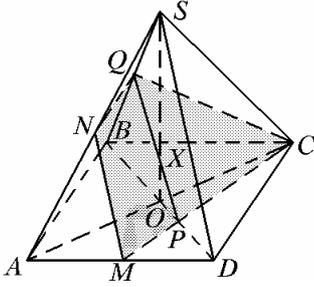


Рис. 13

Значит α пересекает грань ASD по отрезку MN , где N – середина SA . Аналогично α пересекает плоскость BSD по прямой PQ , параллельной SD , где P – точка пересечения прямых CM и BD , так как $CM \in \alpha$ и $BD \in BSD$. Соединив точку Q с точками N и C , получаем искомое сечение $MNCQ$.

Как мы показали выше, N – середина ребра AS . Далее, в треугольнике ACD P – точка пересечения медиан ($AO = OC$ и $DM = MA$), поэтому $DP = \frac{2}{3}DO = \frac{1}{3}DB$. Из подобия треугольников BSD и BQP получаем, что $BQ : BS = BP : BD = 2 : 3$. Наконец, отношение $SX : XO$, где X – точка пересечения SO и плоскости α , т.е. $X = SO \cap PQ$, найдем, воспользовавшись известной из планиметрии теоремой Менелая.

Пусть на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC или на их продолжениях лежат точки A_1, B_1, C_1 соответственно, причем четное число из них лежат на сторонах, а не на продолжениях; тогда для того, чтобы эти точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Согласно этой теореме, примененной к треугольнику BSO и прямой PXQ , получаем: $\frac{SX}{XO} \cdot \frac{OP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QS} = 1$, т.е. $\frac{SX}{XO} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = 1$, откуда

$$\frac{SX}{XO} = 2. \blacksquare$$

Пример 9. Плоскость α пересекает ребра AS, SB и BC пирамиды $SABC$. Докажите, что α пересекает ребро CA .

Первый способ: $\alpha = (KLM)$. Плоскость α делит пространство на два полупространства Π_1 и Π_2 . Из условия следует, что если $A \in \Pi_1$, то $S \in \Pi_2$, далее $S \in \Pi_2 \Rightarrow B \in \Pi_1 \Rightarrow C \in \Pi_2$. Итак, A и C в разных полупространствах, поэтому отрезок AC пересекает α .

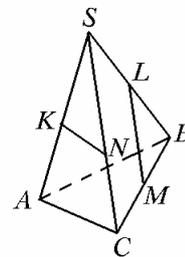


Рис. 14

Второй способ: Пусть $K = \alpha \cap AS, L = \alpha \cap SB, M = \alpha \cap BC$. Плоскость α пересекает ребро AS , значит она пересекает грань ASC . Если α не пересекает ребро AC , то она пересекает ребро SC в точке N . Но тогда, по признаку, прямые NK и LM – скрещиваются и не могут лежать в одной плоскости.

§ 4. Применение проектирования при построении сечений

В примерах, разобранных выше, следы секущей плоскости находились достаточно легко, что объясняется наличием двух точек в плоскости одной грани многогранника, принадлежащих также плоскости сечения. Теперь мы рассмотрим более сложные ситуации.

Пример 10. Построить сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , проходящей через центры O и P граней $A_1 B_1 C_1 D_1$ и $CC_1 D_1 D$, а также через точку R на ребре DA такую, что $AR : RD = 4 : 3$. Найти площадь сечения, если $AB = a$.

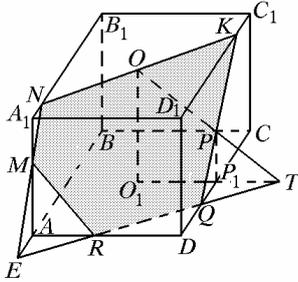


Рис. 15

Пусть O_1 и P_1 – проекции на плоскость ABC в направлении бокового ребра куба точек O и P . Тогда $OO_1 \parallel PP_1 \parallel AA_1$ и следовательно точки O, O_1, P, P_1 лежат в одной плоскости. При этом $O, P \in \alpha$, $O_1, P_1 \in (ABCD)$. Поэтому точка $T = OP \cap O_1P_1$ лежит в плоскостях α и $(ABCD)$. Так же и $R \in \alpha \cap (ABCD)$. Отсюда следует, что прямая RT – след α на

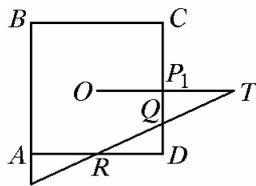


Рис. 16

плоскости $(ABCD)$ и точка K пересечения прямых PQ и D_1C_1 лежит в α . Тогда KO – след α на плоскости $A_1 B_1 C_1$, $N = KO \cap A_1 B_1$ – точка, принадлежащая α и плоскости $AA_1 B_1$. Точка E также принадлежит этим плоскостям, поэтому EN – след α на $AA_1 B_1$, и значит, $QRMNK$ – искомое сечение.

Для нахождения площади сечения заметим, что $S_\alpha = S_{QENK} - S_{REM}$.

Четырехугольник $QENK$ – параллелограмм, так как образован при сечении α с парами параллельных плоскостей. Кроме того, $KN = 2KO = 2KP = KQ$, поэтому $QENK$ – ромб; его площадь S_1

можно найти по формуле $S_1 = \frac{1}{2} d_1 d_2$, где $d_1 = NQ$, $d_2 = KE$. Из того,

что O и P – центры граней, следует: $A_1 N = KC_1 = QD$, поэтому $NA_1 DQ$ – параллелограмм (из того, что $B_1 A_1 \perp AA_1 D_1$ следует, что $NA_1 DQ$ – прямо угольник), поэтому $d_1 = NQ = A_1 D = a\sqrt{2}$. Для

нахождения d_2 определим положение вершин сечения на ребрах куба. Из подобия треугольников TPP_1 и TOO_1 с коэффициентом

$k = PP_1 : OO_1 = \frac{1}{2}$ следует, что $TP_1 = \frac{1}{2} TO_1$, т.е. $TP_1 = P_1 O_1 = \frac{a}{2}$.

Теперь из подобия треугольников $TP_1 Q$ и RDQ (рис. 16) получаем:

$$P_1Q : QD = TP_1 : RD = \frac{a}{2} : \frac{3}{7}a = 7 : 6, \quad \text{т.е.} \quad QD = \frac{6}{13}P_1D = \frac{3a}{13}.$$

Из подобия треугольников QDR и EAR получаем:

$$AE : DQ = AR : DR = 4 : 3, \quad AE = \frac{4a}{13}.$$

Аналогично рассуждая, получаем, что $AM = \frac{4a}{7}$

(впрочем, можно было воспользоваться симметрией куба и рассматриваемого сечения относительно плоскости ABC_1). Из рис. 17,

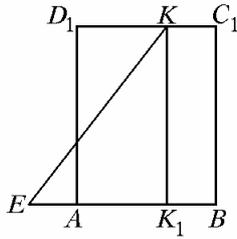


Рис. 17 где

$$KC_1 = DQ = \frac{3a}{13}, \quad \text{получаем}$$

$$EK_1 = AE + AB - K_1B = \frac{4a}{13} + a - \frac{3a}{13} = \frac{14a}{13}, \quad KK_1 = AD_1 = a\sqrt{2}, \quad \text{т.е.}$$

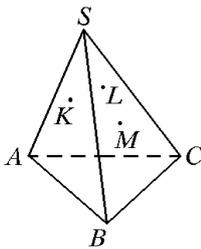
$$KE = \sqrt{\frac{196a^2}{169} + 2a^2} = \frac{\sqrt{534}}{13}a. \quad \text{Значит, } S_1 = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{\sqrt{267}}{13}a^2. \quad \text{Для}$$

нахождения $S_{REM} = S_2$ заметим, что треугольники REM и QEN подобны с коэффициентом $k_1 = RE : QE = RA : DA = 4 : 7$. Поэтому

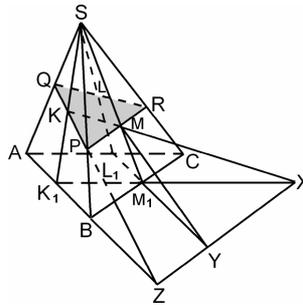
$$S_2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 S_{QEN} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \frac{1}{2}S_1 = \frac{8}{49}S_1. \quad \text{Итак, } S_\alpha = \frac{41}{49}S_1 = \frac{41\sqrt{267}}{637}a^2.$$

Параллельное проектирование удобно использовать при построении сечений призм (в частности, параллелепипедов, кубов). При этом, как правило, в качестве плоскости проектирования выбирают плоскость основания призмы, а за направление проектирования – направление бокового ребра призмы.

При построении сечений пирамид удобно пользоваться *центральной* проектированием.



а)



б)

Рис. 18

Замечание. Согласно данному определению точки, лежащие в плоскости, проходящей через центр проектирования параллельно плоскости проектирования, не имеют проекций.

Пример 11. Построим сечение пирамиды $SABC$ плоскостью KLM (рис. 18а), где $K \in (ASB)$, $L \in (ASC)$, $M \in (BSC)$.

□ Построить центральные проекции (центр проектирования – точка S) точек K, L, M на плоскости ABC . Пусть это будут точки K_1, L_1, M_1 (рис. 18б). Построим точки пересечения прямых KM и $K_1M_1(X)$, LM и $L_1M_1(Y)$. Тогда прямая XY – след α на плоскости ABC . Пусть прямые XY и AB пересекаются в точке Z (на рис. точка Z лежит на продолжении BA в точку B). Значит KZ – след α на плоскости ASB

проектированием.

Определение. Пусть в пространстве заданы плоскость α (плоскость проектирования) и не принадлежащая ей точка S (центр проектирования). *Центральной проекцией* точки M называется точка M' пересечения прямой SM с плоскостью α , если она существует.

и точки P и Q – точки пересечения ребер SA и SB с прямой KZ – вершины сечения. Наконец, QL – след α на плоскости ASC . Треугольник PQR – искомое сечение.

§ 5. Перпендикулярность прямых и плоскостей.

Нахождение углов и расстояний

Определения перпендикулярных прямых, перпендикулярной прямой и плоскости, перпендикулярных плоскостей даны в школьном учебнике геометрии. Перечислим самые важные теоремы, которые используются при решении задач: признак перпендикулярности прямой и плоскости, теорема о трех перпендикулярах, *признак перпендикулярности плоскостей*. Формулировки этих теорем можно найти в учебнике.

Пример 12. Ребра AB и CD , AD и BC тетраэдра перпендикулярны. Докажите, что ребра AC и BD также перпендикулярны.

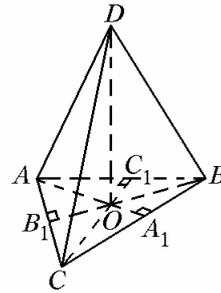


Рис. 19

□ Опустим из точки D перпендикуляр DO на плоскость ABC (рис. 19). По теореме о трех перпендикулярах из того, что $CD \perp AB$ следует, что $CO \perp AB$, т.е. точка O лежит на прямой, содержащей высоту CC_1 треугольника ABC . Аналогично, точка O лежит на прямой, содержащей высоту AA_1 и, значит, O – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC . Следовательно, $BO \perp AC$ и по теореме о трех перпендикуляров $BD \perp AC$. ■

Пример 13. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $AD = b$, ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды, $SA = c$. Найти: а) расстояние от точки A до плоскости SCD ; б) площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно ребру SD .

□ а) По определению *расстоянием от точки до плоскости является длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость*.

Покажем, что перпендикуляр, опущенный из точки A на ребро SD является перпендикуляром к плоскости SCD (рис.20). Действительно, по условию $SA \perp ABC \Rightarrow CD \perp SA$, кроме того, $CD \perp DA$, поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $CD \perp SAD \Rightarrow CD \perp AE$. Но по построению $AE \perp SD$, т.е. прямая AE перпендикулярна пересекающимся прямым CD и SD , следовательно, $AE \perp CSD$. Длину отрезка AE найдем, дважды вычислив площадь треугольника SAD :

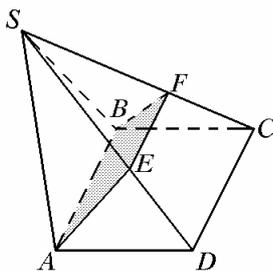


Рис. 20

$$\frac{1}{2} SA \cdot AD = \frac{1}{2} AE \cdot SD \Rightarrow AE = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

б) В п. а) мы показали, что $AE \perp SD$ и $CD \perp SAD$, где $CD \perp SD$.

Значит, искомое сечение – трапеция $AEFB(EF \parallel CD \parallel AB)$. Эта трапеция – прямоугольная, т. к. $EF \parallel CD$, а $CD \perp AE$, т. е.

$$h = AE = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Из подобия треугольников ASE и DSA :

$SE = AS^2 : SD = c^2 : \sqrt{b^2 + c^2}$, а из подобия треугольников SEF и SDC :

$$EF = (CD \cdot SE) : SD = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}. \text{ Таким образом,}$$

$$S_{\alpha} = \frac{1}{2}(EF + AB)AE = \frac{abc}{2\sqrt{b^2 + c^2}} \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + 1 \right).$$

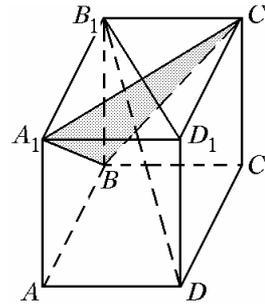


Рис. 21

Пример 14. Доказать, что прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является кубом тогда и только тогда, когда $B_1 D \perp A_1 B C_1$.

□ Если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб (рис.21), то $A_1 C_1 \perp D_1 B_1$, но $D_1 B_1$ – проекция наклонной DB_1 на плоскость $A_1 B_1 C_1$, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $DB_1 \perp A_1 C_1$. Аналогично $DB_1 \perp A_1 B C_1$. Обратно, если $DB_1 \perp A_1 B C_1$, то $DB_1 \perp A_1 C_1$ и по теореме о трех перпендикулярах $DB_1 \perp A_1 C_1$. Но диагонали прямоугольника перпендикулярна, если он является квадратом, значит $A_1 B_1 = B_1 C_1$. Аналогично $A_1 B_1 = BB_1$, т. е. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.

Пример 15. Доказать, что сечение куба плоскостью, перпендикулярной его главной диагонали и проходящей через центр куба, – правильный шестиугольник.

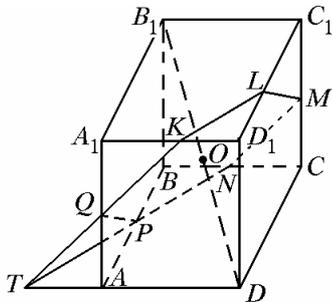


Рис. 22

□ Пусть K, L, M, N, P, Q – середины ребер $A_1 D_1, D_1 C_1, C_1 C, CB, BA, AA_1$ соответственно (рис.22). Покажем, что эти точки лежат в плоскости сечения. Из равенства прямоугольных треугольников $B_1 A_1 K$ и $DD_1 K$ (по двум катетам) следует, что $B_1 K = DK$. Поэтому если O – центр куба, то KO – медиана равнобедренного треугольника $B_1 KD$, следовательно

$KO \perp B_1 D$, т.е. KO лежит в плоскости α . Аналогично и остальные вершины шестиугольника $KLMNPQ$ лежат в плоскости α . Длины всех

сторон шестиугольника $\frac{a}{\sqrt{2}}$, где a – длина ребра куба. Далее, если T – точка пересечения α и прямой AD , то из равенства треугольников

$KA_1 Q$ и TAQ , NBP и TAP следует, что $PT = QT = \frac{a}{\sqrt{2}}$, т.е.

треугольник PTQ равносторонний. Отсюда $\angle NPQ = 180^\circ - \angle TPQ = 120^\circ$. Аналогично и другие углы шестиугольника $KLMNPQ$ равны 120° , т. е. все стороны и углы шестиугольника равны между собой, следовательно, он правильный.

Пример 16. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ вычислить:

а) расстояние от вершины A до плоскости SCD , если $AB = a$, $DS = b$;

б) наибольшее возможное значение угла между ребром SA и плоскостью SCD .

а) В отличие от примера 13, перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость SCD , не попадает на прямую SD (рис.23). Действительно, $AB \parallel CD$ и значит $AB \parallel SCD$, поэтому расстояние h от любой точки

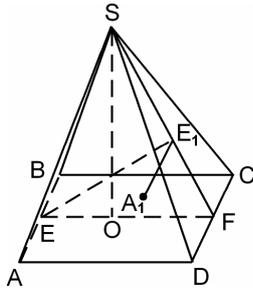


Рис. 23

прямой AB до плоскости SCD одно и то же. Пусть E и F – середины ребер AB и CD . Покажем, что если $EE_1 \perp SF$, то $EE_1 \perp SCD$ (вспомогательные сечения типа SEF, SAC очень часто используются при решении стереометрических задач!). Высота SO пирамиды перпендикулярна прямой DC , лежащей в плоскости ее основания. Кроме того, $EF \perp DC$, и

значит, $DC \perp SEF$, откуда $DC \perp EE_1$. Но по

построению $EE_1 \perp SF$, таким образом, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $EE_1 \perp SCD$. (Теперь можно определить положение проекции A_1 точки A на плоскость SCD : четырехугольник AEE_1A_1 – прямоугольник, поэтому $E_1A_1 = AE = DF$, т.е. A_1 лежит вне треугольника SCD). Рассмотрим площадь треугольника SEF , получаем

$$\frac{1}{2}SO \cdot EF = \frac{1}{2}EE_1 \cdot SF, \text{ откуда}$$

$$EE_1 = a \left(\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} \right) : \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

б) Углом между прямой и плоскостью является угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Поэтому искомым углом φ –

это $\angle ASA_1$, т.е. $\sin \varphi = \frac{AA_1}{AS} = \frac{EE_1}{AS} = \frac{a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}}{b \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}.$

Введем безразмерную переменную $x = \frac{a}{b}$, тогда $\sin \varphi = x \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}.$

Пусть $t = x^2$, большему значению $\sin \varphi$ соответствует (в силу $\sin \varphi > 0$) большее значение $f(t) = \sin^2 \varphi = 2t \frac{2-t}{4-t}$. Имеем:

$$f'(t) = 2 \left(\frac{2t-t^2}{4-t} \right)' = 2 \frac{(2-2t)(4-t) - (2t-t^2)(-1)}{(4-t)^2} = 2 \frac{t^2 - 8t + 8}{(4-t)^2} = 2 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(4-t)^2}, \text{ где } t_1 = 4 - 2\sqrt{2}, t_2 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Трехчлен $(t - t_1)(t - t_2)$ меняет знак с «+» на «-» в точке t_1 , причем $t_1 \in (0; \sqrt{2})$, поэтому $\max f(t) = f(t_1) = 2(2 - \sqrt{2})^2$.

Итак, $\max \sin \varphi = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ и $\max \varphi = \arcsin(2\sqrt{2} - 2)$.

Пример 17. Точка M – середина ребра D_1D куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найти угол и расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и CM .

□ Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным. Пусть N – середина ребра BB_1 (рис. 24), тогда $A_1 N \parallel CM$ и значит $\varphi = \angle N A_1 C_1$ –

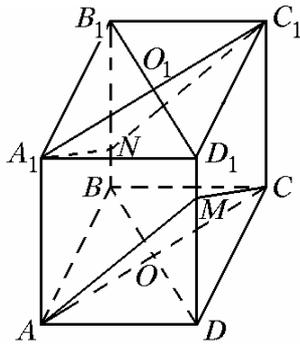


Рис. 24

искомый.

Из треугольника $A_1 N C_1$ со сторонами $A_1 C_1 = a\sqrt{2}$, $A_1 N = C_1 N = a \frac{\sqrt{5}}{2}$ получаем:

$$\cos \varphi = \left(\frac{1}{2} A_1 C_1 \right) / A_1 N = \sqrt{\frac{2}{5}}, \varphi = \arccos \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

□ Расстоянием h между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 называется длина наименьшего из отрезков с концами на данных прямых.

Утверждение 1. h – длина общего перпендикуляра к l_1 и l_2 .

Утверждение 2. h – расстояние между параллельными плоскостями, содержащими данные прямые.

Согласно признаку параллельности плоскостей из того, что $A_1 C_1 \parallel AC$

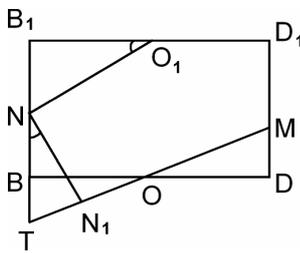


Рис. 25

и $A_1 N \parallel CM$, следует, что $(A_1 C_1 N) \parallel (ACM)$. Это и есть параллельные плоскости, содержащие скрещивающиеся прямые $A_1 C_1$ и CM . Поэтому h – расстояние между плоскостями, что то же самое, расстояние от точки N до плоскости ACM . Докажем, что эта длина перпендикуляра NN_1 , опущенного из точки N на

прямую MO , где O – центр грани $ABCD$. Действительно, $AC \perp D_1 D$ и кроме того, $AC \perp BD$. Поэтому $AC \perp BB_1 D_1 D$, в этой плоскости лежит прямая NN_1 , поэтому, в частности, $AC \perp NN_1$, т.е. прямая NN_1 перпендикулярна прямым AC и MO , т.е. плоскости ACM . Рассмотрим вспомогательное сечение $BB_1 D_1 D$ (рис.25). Пусть T – точка пересечения прямых MO и BB_1 . Тогда из $\triangle TBO = \triangle MDO$ следует

$$TB = MD = \frac{a}{2}, \text{ откуда } NT = a. \text{ Теперь из подобия треугольников } NTN_1 \text{ и } O_1 N B_1 \text{ получаем } NN_1 : O_1 B_1 = NT : O_1 N, \text{ где } O_1 N = a \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = NN_1 = a \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Пример 18. Построить сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через прямую AD_1 перпендикулярно плоскости $A_1 B C_1$.

Утверждение. Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.

(В одну сторону это утверждение называется «признак перпендикулярности плоскостей»).

Таким образом, нам достаточно пересечь прямую AD_1 какой-либо прямой, перпендикулярной плоскости A_1BC_1 (рис.26). В примере 14 мы показали, что $DB_1 \perp A_1BC_1$, поэтому нужно построить

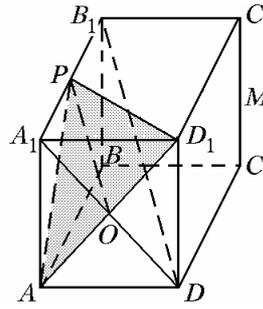


Рис. 26

прямую l , $l \parallel DB_1$, перпендикулярную AD_1 . Как легко показать, в качестве l можно взять OP – среднюю линию треугольника DA_1B_1 (во-первых, $OP \parallel DB_1$, во-вторых, $O \in AD_1$). Треугольник APD_1 – искомое сечение.

§ 6. Векторный метод на плоскости

Из разобранных выше примеров видно, что решение многих стереометрических задач распадается на последовательное решение нескольких планиметрических задач. При этом часто возникает задача о нахождении отношения длин отрезков в каких-либо плоских сечениях или проекциях. Решение этих задач может быть получено с помощью теорем Фалеса и подобия, а также с помощью теоремы Менелая. Достаточно эффективно может быть использован и *векторный метод* решения, который мы напомним в этом параграфе.

Утверждение. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} на плоскости не равны нулю и не параллельны. Тогда для любого вектора \vec{x} существует единственное представление вида $\vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, где λ и μ – некоторые числа.

Замечание. Ненулевые непараллельные векторы \vec{a} и \vec{b} на плоскости принято называть *базисом* на плоскости, или просто *базисом*, а представление $\vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ – *разложением* вектора \vec{x} по базису \vec{a}, \vec{b} .

Отметим, что мы нигде не предполагали, что векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны.

Следствие. Если мы получили разложение вектора \vec{x} по базису \vec{a}, \vec{b}

двумя способами: $\vec{x} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} = \lambda_2 \vec{a} + \mu_2 \vec{b}$, то

$$\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2.$$

Это простое соображение помогает находить отношение длин отрезков в плоских конфигурациях.

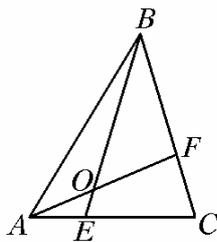


Рис. 27

(рис.27).

Пример 19. В $\triangle ABC$ $E \in AC, F \in BC, AE / AC = 1/3, BF / FC = 2, O = AF \cap BE$. Найти AO / OF и BO / OE

□ Выберем базис $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AC}$. $BF/BC = 2/3$.

Пусть $AO = \lambda AF$, $BO = \mu BE$. Выразим вектор \vec{AO} двумя способами:

$$(1) \vec{AO} = \lambda \vec{AF} \text{ и } (2) \vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BO}.$$

$$(1): \vec{AO} = \lambda(\vec{AB} + (2/3)\vec{BC}) = \\ = \lambda(\vec{AB} + (2/3)(\vec{AC} - \vec{AB})) = (\lambda/3)\vec{a} + (2\lambda/3)\vec{b}.$$

$$(2): \vec{AO} = \vec{AB} + \mu \vec{BE} = (1 - \mu)\vec{AB} + \mu \vec{AE} = (1 - \mu)\vec{a} + (\mu/3)\vec{b}.$$

По следствию имеем систему $\frac{\lambda}{3} = 1 - \mu$, $\frac{2\lambda}{3} = \frac{\mu}{3}$, откуда

$$\lambda = \frac{3}{7}, \mu = \frac{6}{7}. \text{ В итоге } AO/OA = 3/4, BO/OE = 6.$$

Пример 20. В параллелограмме $ABCD$ $E \in BC$, $F \in CD$: $BE/EC = 1/2$, $CF/FD = 3$, $O = AE \cap BF$. Найти AO/AE и BO/BF (рис.28).

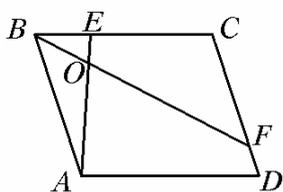


Рис. 28

□ За базис выберем $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$.

$$AO = \lambda AE, BO = \mu BF.$$

Выразим вектор \vec{BO} двумя способами:

$$(1) \vec{BO} = \mu \vec{BF} \text{ и } (2) \vec{BO} = \vec{AO} - \vec{AB}.$$

$$(1): \vec{BO} = \mu \vec{BF} = \mu(-\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{DF}) = \\ = \mu(-\vec{a} + \vec{b} + (1/4)\vec{a}) = (-3\mu/4)\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

$$(2): \vec{BO} = \vec{AO} - \vec{AB} = \lambda \vec{AE} - \vec{AB} = \\ = \lambda(\vec{AB} + \vec{BE}) - \vec{AB} = \lambda(\vec{AB} + (1/3)\vec{BC}) - \vec{AB} = (\lambda - 1)\vec{a} + (\lambda/3)\vec{b}.$$

По следствию имеем систему $-3\mu/4 = \lambda - 1$, $\mu = \lambda/3$, откуда $\lambda = 4/5$, $\mu = 4/15$.

§7. Многогранники

Перед чтением теории, те кто учится по учебнику Атанасяна и др., должны прочитать Главу III: §1 п. 25, §3 п. 31, 32, 33, а те, кто учится по учебнику Погорелова - §19 п. 168, п. 180.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

При изучении многогранников большое значение имеют инварианты, т. е. некоторые величины, принимающие одно и то же значение (которое может зависеть от числа вершин, ребер, граней многогранника), не зависящее от конкретного устройства многогранника.

Часто подсчитанная разными способами величина (например – очень часто используемая на практике – сумма плоских углов всех граней многогранника) позволяет получить решение нетривиальной задачи.

Пример. Доказать, что не существует многогранника, все грани которого – шестиугольники.

Доказательство: От противного. Пусть n – число граней предполагаемого многогранника.

Подсчитаем двумя способами сумму плоских углов всех граней этого многогранника.

1 способ. Так как каждая грань – шестиугольник, то сумма ее плоских углов $\pi(6 - 2) = 4\pi$, поэтому сумма всех плоских углов есть $\sum_1 = 4\pi \cdot n$.

2 способ. В любой вершине многогранника сходится не менее 3-х ребер. Всего вершин не более $\frac{6n}{3} = 2n$. Сумма плоских углов при каждой вершине строго меньше 2π , поэтому сумма всех плоских углов \sum_2 строго меньше $2n \cdot 2\pi = 4\pi n$.

Итак, $\sum_2 < \sum_1$, что приводит к противоречию.

Одно из следствий этой задачи состоит в том, что футбольный мяч шьют из кожаных кусков 5-и и 6-и угольной, а иногда и 3-х угольной формы (обратите внимание!)

Аналогично можно доказать, что не существует многогранника, все грани которого k -угольники при $k = 7, 8, \dots$.

Отметим, что при $3 \leq k \leq 5$ приведенное выше рассуждение не дает противоречия, что и понятно: существует правильный тетраэдр, куб, додекаэдр (посмотрите картинки в школьном учебнике).

В 1758 г. Леонард Эйлер установил важную формулу, связывающую число вершин, граней и ребер выпуклого многогранника.

Пусть M – выпуклый многогранник, B – число вершин M , Γ – число граней M , P – число ребер M . Тогда

$$B + \Gamma - P = 2.$$

Отметим, что для невыпуклых многогранников формула Эйлера не верна. Посмотрите на рисунок 29.

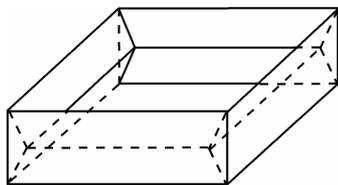


Рис. 29

Обозначим через \tilde{A}_i число граней выпуклого многогранника M с i сторонами, а через B_i – число вершин M , в которых сходится i ребер M . Тогда очевидны равенства

$$\sum \Gamma_i = \Gamma, \quad \sum B_i = B \quad (1)$$

(суммирование ведется по всем допустимым по смыслу числам i , отметим, что $i \geq 3$).

Кроме того, имеют место формулы

$$\sum i\Gamma_i = 2P, \quad \sum iB_i = 2P \quad (2)$$

Поясним происхождение формул (2):

Ясно, что ребро AB (на рис. 30) учитывается дважды: при подсчете

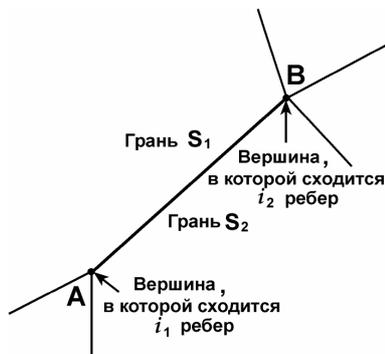


Рис. 30

сторон грани S_1 и при подсчете сторон грани S_2 . Ребро AB дважды считается, как ребро, входящее в вершину A и B . Это же касается остальных ребер M . Докажем формулу Эйлера.

См. рис. 31. Выберем грань S многогранника и плоскость Π , параллельную S . Выберем точку O над гранью S так, чтобы проведенные через вершины многогранника лучи с вершиной в точке O при пересечении с

Π давали бы проекции вершин многогранника M на плоскость Π и

никакая пара вершин M не отображалась бы в одну точку плоскости Π (в силу конечности числа вершин M это легко сделать, немного «подвигав» точку O). В результате в плоскости Π возникнет система точек, заключенных в некоторый «объемлющий» k – угольник, причем, выбирая точку O близко к грани S , легко добиться, чтобы k равнялось числу сторон грани S . Отметим также, что k – угольник выпуклый как гомотетия S с центром в точке O .

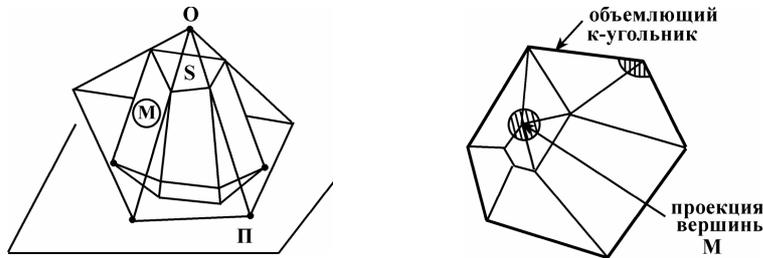


Рис. 31

Мы будем считать проекцией вершины B и точку B_1 (на рис. 32),

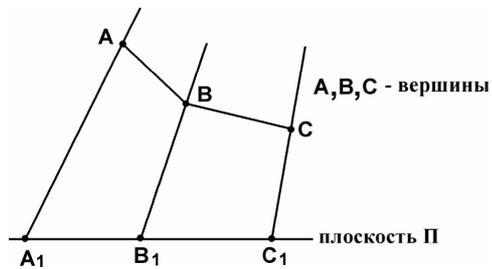


Рис. 32

лежащую на отрезке A_1C_1 , где A_1 – проекция вершины A , а C_1 – вершины C .

Пусть B' – число проекций вершин M , $B' = B$ по построению.

Пусть P' – число проекций ребер M на Π , $P' = P$ т. к.

вершины M при проектировании не сливаются и учитываются в случае ситуации на рис. 32.

Пусть Γ' – число многоугольников, полученных при прорисовке проекций граней M , $\Gamma' = \Gamma - 1$ (объемлющий k – угольник мы не считаем).

Подсчитаем двумя способами сумму всех плоских углов при проекциях вершин M в плоскости Π (считая и углы объемлющего k – угольника).

1 способ. \sum_1 есть сумма углов объемлющего k – угольника, т. е. $(k - 2)\pi$, и $(B' - k) \cdot 2\pi$, т. к. сумма плоских углов с вершиной в проекции вершины M внутри объемлющего k – угольника равна 2π (см. рис. 31), а число таких точек $B' - k$.

Итак, $\sum_1 = (k - 2)\pi + (B' - k)2\pi = 2\pi B' - \pi k - 2\pi$.

2 способ. $\sum_2 = \pi \sum (i - 2)\Gamma'_i$, где Γ'_i – число многоугольников в проекции на плоскость Π с i сторонами, суммирование ведется по всем допустимым по смыслу i . Как и при выводе (2) можно получить соотношение

$$\sum i\Gamma'_i = 2P' - k.$$

(каждая сторона, кроме сторон объемлющего k – угольника считается в сумме $\sum i\Gamma'_i$ дважды, это показывается так же, как и в доказательстве формулы (2), а стороны объемлющего k – угольника – 1 раз). Следовательно,

$$\sum_2 = \pi \sum i\Gamma'_i - 2\pi \sum \Gamma'_i = \pi(2P' - k) - 2\pi\Gamma'' = 2\pi P' - \pi k - 2\pi\Gamma''$$

$$\sum_1 = \sum_2, \text{ поэтому}$$

$$2\pi B' - \pi k - 2\pi = 2\pi P' - \pi k - 2\pi\Gamma'' \Rightarrow B' + \Gamma' - P' = 1 \text{ и } B + \Gamma - P = 2.$$

Формула Эйлера и формулы (2) – полезный инструмент для решения задач о существовании/не существовании многогранников с заданным набором вершин, граней, ребер.

При конструировании многогранника с заданными свойствами удобно начертить плоскую сеточную модель (или, как говорят, граф), обладающую теми же свойствами, что и искомый многогранник. Из общей теории (детали которой мы здесь опускаем) следует, что при весьма общих предположениях нахождение сеточной модели влечет существование (и нахождение) многогранника.

Пример 21. Существует ли многогранник, у которого 8 граней и все они – треугольники.

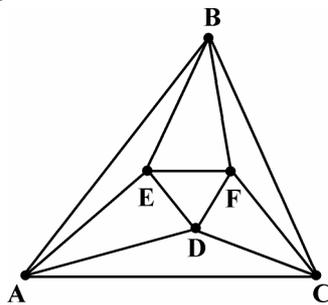


Рис. 33

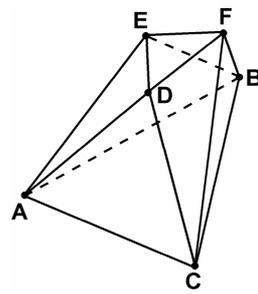


Рис. 34

Решение. Нарисуем конструкцию на рис. 33. В ней участвуют 8 треугольников: $ABC, ABE, BCF, ACD, AED, BEF, CFD, EFD$.

Если трактовать рис. 33 как «вид сверху», то немедленно возникает искомый многогранник (рис. 34).

Пример 22. Доказать, что у многогранника с 6 вершинами и 12 ребрами все грани – треугольники.

Решение. Выясним, что нам ждать от многогранника (если он существует). По формуле Эйлера

$$\Gamma = 2 + P - B = 8 = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5,$$

где Γ_3 – число граней с 3 сторонами, Γ_4 – число граней с 4 сторонами, Γ_5 – число граней с пятью сторонами.

Ясно, что $\Gamma_i = 0$ при $i \geq 6$, т. к. у многогранника всего 6 вершин.

Запишем соотношения (1) и (2) для числа граней:

$$\begin{cases} 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 = 24 = 2P, \\ \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 = 8. \end{cases}$$

$$\Gamma_3 = 8 - \Gamma_4 - \Gamma_5; \quad 24 - 3\Gamma_4 - 3\Gamma_5 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 = 24 \Leftrightarrow \Gamma_4 + 2\Gamma_5 = 0, \text{ т.}$$

е. (т. к. Γ_4 и Γ_5 натуральные числа или 0) $\Gamma_4 = \Gamma_5 = 0$ и $\Gamma = \Gamma_3 = 8$.

Итак, граней $\Gamma = 8$ и все они треугольники, $B = 6, P = 12$.

Все же задача еще не решена: не ясно, существует ли вообще указанный многогранник. Но это, например, многогранник из примера 21 или октаэдр.

Контрольные вопросы

1(2). l_1 и l_2 скрещивающиеся прямые. Найти необходимое и достаточное условие существования такой плоскости α , что $l_1 \subset \alpha$, а $l_2 \perp \alpha$.

2(2). На плоскости даны три точки – изображения точки пересечения

диагоналей и середин сторон AB и BC квадрата $ABCD$. Построить изображение квадрата.

3(2). В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S на ребрах SA, BC и AD взяты точки K, N и M соответственно (взятые точки не совпадают с вершинами ребер). Доказать, что плоскость (KMN) пересекает отрезок SB .

4(2). Один школьник разрезал выпуклый многогранник на грани и послал этот набор граней другому школьнику. Может ли получиться, что другой школьник склеит другой многогранник?

5(3). Дан трехгранный угол, плоские углы которого α, β и γ , причем величина двугранного угла против плоского угла γ равна 90° . Доказать, что $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$.

6(1). Доказать, что угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными к данным плоскостям.

7(3). Пусть у выпуклого многогранника B вершин. Доказать, что сумма всех плоских углов многогранника $2\pi(B - 2)$.

8(3). Показать, что если взять натуральные числа $B \geq 4, G \geq 4$ и $P \geq 4$ такие, что $B + G - P = 2$, то вовсе необязательно найдется выпуклый многогранник с числом вершин B , граней G и ребер P (привести соответствующий пример).

Задачи

1(2). В пространстве дана плоскость α и точка $A \in \alpha$. Точка H – ортогональная проекция точки A на плоскость α . Найти геометрическое место точек – ортогональных проекций точки A на прямые, проходящие через точку H под углом $\pi/4$ к плоскости α .

2(2). M – плоский многоугольник, N – ортогональная проекция M на плоскость, угол между которой и плоскостью многоугольника M равен φ . Доказать, что площади M и N связаны соотношением:
 $S_N = S_M \cos \varphi$.

3(5). Существует ли выпуклый девятигранник, у которого все грани – четырехугольники?

4(4). Ребра тетраэдра $ABCD$ равны 1, K – середина AB , $E \in CD : EC/ED = 2$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, E параллельно BC , найти площадь этого сечения и угол между прямыми (BC) и (KE) .

5(5). В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AA_1, DD_1 и AD взяты точки K, M, N соответственно, так, что $D_1 M / MD = AK / KA_1 = AN / ND = 1/2$. Построить сечение $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостями α и β , где $K \in \alpha, N \in \beta, \alpha \parallel (AMC_1)$ и $\beta \parallel (AMC_1)$.

6(5). Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Точка M – середина $A_1 B_1$. Построить сечение куба плоскостями α и β и найти их площади, если α проходит через $A_1 C_1$ параллельно MD ; β проходит через MD параллельно $A_1 C_1$.

7(4). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ M – середина ребра AD , $F \in SC : SF/FC = 1/3$. Построить сечение пирамиды

плоскостью α , проходящей через точки F, D , параллельно SM . В каком отношении плоскость α делит высоту пирамиды?

8(4). Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , проходящей через точку пересечения диагоналей грани $A_1 B_1 C_1 D_1$, середину ребра AB и точку $F \in DD_1 : D_1 F = 2FD$. В каком отношении плоскость α делит ребро $C_1 D_1$?

9(4). Какие правильные многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью? Может ли при пересечении куба плоскостью получиться семиугольник (не обязательно правильный)?

10(3). Показать, что тетраэдр с ребрами 1 можно ортогонально спроектировать на некоторую плоскость, что площадь проекции будет $1/2$.

11(5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребро основания $AB = a$, боковое ребро $SA = b$, M – середина ребра AC . Найти: а) расстояние от точки M до плоскости (SBC) ; б) наибольшее возможное значение угла между прямой (SM) и плоскостью (SBC) .

12(5). В тетраэдре $SABC$ все ребра равны 1. M – середина SA , $N \in AC : AN = \frac{AC}{4}$. Найти сечение тетраэдра плоскостью α , проходящей через точку M перпендикулярно прямой (BN) . Найти площадь полученного сечения.

13(6). а) Верно ли, что у многогранника с 12 вершинами и 30-ю ребрами все грани – треугольники?

б) Верно ли, что у многогранника с 12 гранями и 30-ю ребрами все грани – пятиугольники?