Контрольные вопросы

1(2). l_1 и l_2 скрещивающиеся прямые. Найти необходимое и достаточное условие существования такой плоскости α, что $l_1 \subset \alpha$, а $l_2 \perp \alpha$.
2(2). На плоскости даны три точки – изображения точки пересечения диагоналей и середин сторон AB и BC квадрата $ABCD$. Построить изображение квадрата.
3(2). В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S на ребрах SA, BC и AD взяты точки K, N и M соответственно (взятые точки не совпадают с вершинами ребер). Доказать, что плоскость (KMN) пересекает отрезок SB.
4(2). Один школьник разрезал выпуклый многогранник на грани и послал этот набор граней другому школьнику. Может ли получиться, что другой школьник склеит другой многогранник?
5(3). Дан трехгранный угол, плоские углы которого α, β и γ, причем величина двугранного угла против плоского угла γ равна 90°. Доказать, что $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.
6(1). Доказать, что угол между двумя плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными к данным плоскостям.
7(3). Пусть у выпуклого многогранника B вершин. Доказать, что сумма всех плоских углов многогранника $2\pi(B-2)$.
8(3). Показать, что если взять натуральные числа $B \geq 4, \Gamma \geq 4$ и $P \geq 4$ такие, что $B + \Gamma - P = 2,$ то вовсе необязательно найдется выпуклый многогранник с числом вершин B, граней Γ и ребер P (привести соответствующий пример).

Задачи

1(2). В пространстве дана плоскость α и точка $A \in \alpha$. Точка H – ортогональная проекция точки A на плоскость α. Найти геометрическое место точек – ортогональных проекций точки A на прямые, проходящие через точку H под углом $\pi/4$ к плоскости α.
2(2). M – плоский многоугольник, N – ортогональная проекция M на плоскость, угол между которой и плоскостью многоугольника M равен φ. Доказать, что площади M и N связаны соотношением: $S_N = S_M \cos\varphi$.
3(5). Существует ли выпуклый девятигранник, у которого все грани – четырехугольники?
4(4). Ребра тетраэдра $ABCD$ равны 1, K – середина $AB, E \in CD : EC/ED = 2.$ Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, E параллельно BC, найти площадь этого сечения и угол между прямыми (BC) и (KE).
5(5). В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AA_1, DD_1 и AD взяты точки K, M, N соответственно, так, что $D_1M/MD = AK/KA_1 = AN/ND = 1/2.$ Построить сечение $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями α и β, где $K \in \alpha, N \in \beta, \alpha \| (AMC_1)$ и $\beta \| (AMC_1)$.

6(5). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка M – середина A_1B_1. Построить сечение куба плоскостями α и β и найти их площади, если α проходит через A_1C_1 параллельно MD; β проходит через MD параллельно A_1C_1.

7(4). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ M – середина ребра $AD, F \in SC : SF / FC = 1/3$. Построить сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точки F, D, параллельно SM. В каком отношении плоскость α делит высоту пирамиды?

8(4). Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, середину ребра AB и точку $F \in DD_1 : D_1F = 2FD$. В каком отношении плоскость α делит ребро C_1D_1?

9(4). Какие правильные многоугольники могут получиться при пересечении куба плоскостью? Может ли при пересечении куба плоскостью получиться семиугольник (не обязательно правильный)?

10(3). Показать, что тетраэдр с ребрами 1 можно ортогонально спроектировать на некоторую плоскость, что площадь проекции будет $1/2$.

11(5). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребро основания $AB = a$, боковое ребро $SA = b$, M – середина ребра AC. Найти: а) расстояние от точки M до плоскости (SBC); б) наибольшее возможное значение угла между прямой (SM) и плоскостью (SBC).

12(5). В тетраэдре $SABC$ все ребра равны 1. M – середина $SA, N \in AC : AN = \dfrac{AC}{4}$. Найти сечение тетраэдра плоскостью α, проходящей через точку M перпендикулярно прямой (BN). Найти площадь полученного сечения.

13(6). а) Верно ли, что у многогранника с 12 вершинами и 30-ю ребрами все грани – треугольники?

б) Верно ли, что у многогранника с 12 гранями и 30-ю ребрами все грани – пятиугольники?

