§7. Многогранники

Перед чтением теории, те кто учится по учебнику Атанасяна и др., должны прочитать Главу III : §1 п. 25, §3 п. 31, 32, 33, а те, кто учится по учебнику Погорелова - §19 п. 168, п. 180.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

При изучении многогранников большое значение имеют инварианты, т. е. некоторые величины, принимающие одно и то же значение (которое может зависеть от числа вершин, ребер, граней многогранника), не зависящее от конкретного устройства многогранника.

Часто подсчитанная разными способами величина (например – очень часто используемая на практике – сумма плоских углов всех граней многогранника) позволяет получить решение нетривиальной задачи.

Пример. Доказать, что не существует многогранника, все грани которого – шестиугольники.

Доказательство: От противного. Пусть n – число граней предполагаемого многогранника.

Подсчитаем двумя способами сумму плоских углов всех граней этого многогранника.

<u>1 способ.</u> Так как каждая грань – шестиугольник, то сумма ее плоских углов $\pi(6-2)=4\pi,$ поэтому сумма всех плоских углов есть $\sum_1 = 4\pi\cdot n.$

<u>2 способ.</u> В любой вершине многогранника сходится не менее 3-х ребер. Всего вершин не более $\frac{6n}{3}=2n.$ Сумма плоских углов при каждой вершине строго меньше $2\pi,$ поэтому сумма всех плоских углов $\sum_2$ строго меньше $2n\cdot 2\pi = 4\pi n.$

Итак, $\sum_2 < \sum_1,$ что приводит к противоречию.

Одно из следствий этой задачи состоит в том, что футбольный мяч шьют из кожаных кусков 5-и и 6-и угольной, а иногда и 3-х угольной формы (обратите внимание!)

Аналогично можно доказать, что не существует многогранника, все грани которого k - угольники при k = 7, 8, … .

Отметим, что при $3\le k\le 5$ приведенное выше рассуждение не дает противоречия, что и понятно: существует правильный тетраэдр, куб, додекаэдр (посмотрите картинки в школьном учебнике).

В 1758 г. Леонард Эйлер установил важную формулу, связывающую число вершин, граней и ребер выпуклого многогранника.

Пусть M – выпуклый многогранник, B – число вершин M, Γ – число граней M, P – число ребер M. Тогда

$$B+\Gamma-P=2.$$

Отметим, что для невыпуклых многогранников формула Эйлера не верна. Посмотрите на рисунок 29.

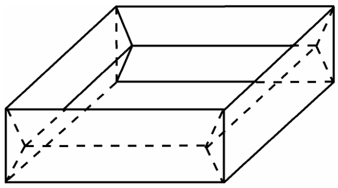

Рис. 29

Обозначим через $\tilde{A}_i$ число граней выпуклого многогранника M с i сторонами, а через B_i – число вершин M, в которых сходится i ребер M. Тогда очевидны равенства

$$\sum \Gamma_i = \Gamma, \ \sum B_i = B \qquad (1)$$

(суммирование ведется по всем допустимым по смыслу числам i, отметим, что $i \geq 3$).

Кроме того, имеют место формулы

$$\sum i\Gamma_i = 2P, \ \sum iB_i = 2P \qquad (2)$$

Поясним происхождение формул (2):

Ясно, что ребро AB (на рис. 30) учитывается дважды: при подсчете сторон грани S_1 и при подсчете сторон грани S_2. Ребро AB дважды считается, как ребро, входящее в вершину A и B. Это же касается остальных ребер M.

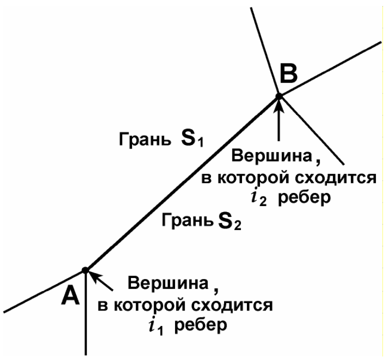

Рис. 30

Докажем формулу Эйлера.

См. рис. 31. Выберем грань S многогранника и плоскость Π, параллельную S. Выберем точку O над гранью S так, чтобы проведенные через вершины многогранника лучи с вершиной в точке O при пересечении с Π давали бы проекции вершин многогранника M на плоскость Π и никакая пара вершин M не отображалась бы в одну точку плоскости Π (в силу конечности числа вершин M это легко сделать, немного «подвигав» точку O). В результате в плоскости Π возникнет система точек, заключенных в некоторый «объемлющий» k – угольник, причем, выбирая точку O близко к грани S, легко добиться, чтобы k равнялось числу сторон грани S. Отметим также, что k – угольник выпуклый как гомотетия S с центром в точке O.

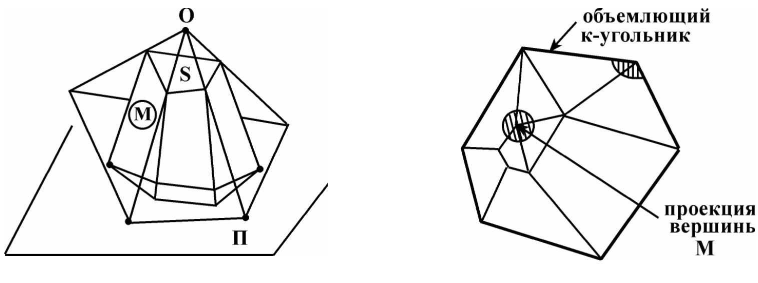

Рис. 31

Мы будем считать проекцией вершины B и точку B_1 (на рис. 32), лежащую на отрезке A_1C_1, где A_1 – проекция вершины A, а C_1 – вершины C.

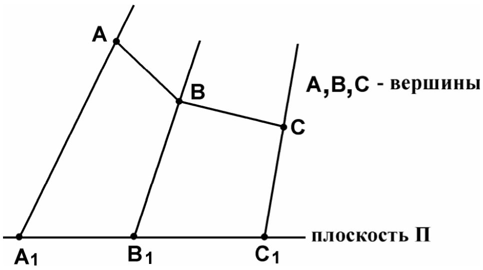

Рис. 32

Пусть B' – число проекций вершин M, $B' = B$ по построению.

Пусть P' – число проекций ребер M на Π, $P' = P$ т. к.

вершины M при проектировании не сливаются и учитываются в случае ситуации на рис. 32.

Пусть $Г'$ – число многоугольников, полученных при прорисовке проекций граней M, $Г' = Г - 1$ (объемлющий k – угольник мы не считаем).

Подсчитаем двумя способами сумму всех плоских углов при проекциях вершин M в плоскости $П$ (считая и углы объемлющего k – угольника).

<u>1 способ.</u> $\sum_1$ есть сумма углов объемлющего k – угольника, т. е. $(k-2)\pi$, и $(B'-k)\cdot 2\pi$, т. к. сумма плоских углов с вершиной в проекции вершины M внутрь объемлющего k – угольника равна 2π (см. рис. 31), а число таких точек $B'-k$.

Итак, $\sum_1 = (k-2)\pi + (B'-k)2\pi = 2\pi B' - \pi k - 2\pi$.

<u>2 способ.</u> $\sum_2 = \pi \sum (i-2) Г'_i$, где $Г'_i$ – число многоугольников в проекции на плоскость $П$ с i сторонами, суммирование ведется по всем допустимым по смыслу i. Как и при выводе (2) можно получить соотношение

$$\sum i Г'_i = 2P' - k.$$

(каждая сторона, кроме сторон объемлющего k – угольника считается в сумме $\sum i Г'_i$ дважды, это показывается так же, как и в доказательстве формулы (2), а стороны объемлющего k – угольника – 1 раз).

Следовательно,

$$\sum_2 = \pi \sum i Г'_i - 2\pi \sum Г'_i = \pi(2P'-k) - 2\pi Г' = 2\pi P' - \pi k - 2\pi Г'$$

$\sum_1 = \sum_2$, поэтому

$$2\pi B' - \pi k - 2\pi = 2\pi P' - \pi k - 2\pi Г' \Rightarrow B' + Г' - P' = 1 \text{ и } B + Г - P = 2.$$

Формула Эйлера и формулы (2) – полезный инструмент для решения задач о существовании/не существовании многогранников с заданным набором вершин, граней, ребер.

При конструировании многогранника с заданными свойствами удобно начертить плоскую сеточную модель (или, как говорят, граф), обладающую теми же свойствами, что и искомый многогранник. Из общей теории (детали которой мы здесь опускаем) следует, что при весьма общих предположениях нахождение сеточной модели влечет существование (и нахождение) многогранника.

Пример 21. Существует ли многогранник, у которого 8 граней и все они – треугольники.

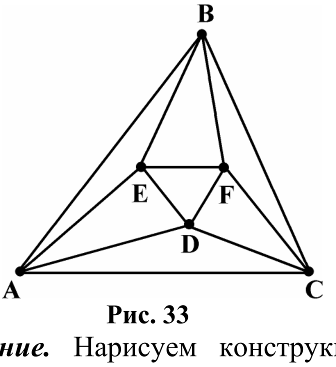

Рис. 33

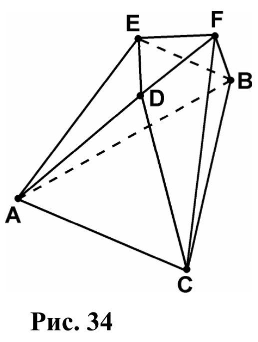

Рис. 34

Решение. Нарисуем конструкцию на рис. 33. В ней участвуют 8 треугольников: ABC, ABE, BCF, ACD, AED, BEF, CFD, EFD.

Если трактовать рис. 33 как «вид сверху», то немедленно возникает искомый многогранник (рис. 34).

Пример 22. Доказать, что у многогранника с 6 вершинами и 12 ребрами все грани – треугольники.

Решение. Выясним, что нам ждать от многогранника (если он существует). По формуле Эйлера

$$Г = 2 + Р - В = 8 = Г_3 + Г_4 + Г_5,$$

где $Г_3$ – число граней с 3 сторонами, $Г_4$ – число граней с 4 сторонами, $Г_5$ – число граней с пятью сторонами.

Ясно, что $Г_i = 0$ при $i \geq 6,$ т. к. у многогранника всего 6 вершин.

Запишем соотношения (1) и (2) для числа граней:

$$\begin{cases} 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 = 24 = 2Р, \\ Г_3 + Г_4 + Г_5 = 8. \end{cases}$$

$Г_3 = 8 - Г_4 - Г_5;\ 24 - 3Г_4 - 3Г_5 + 4Г_4 + 5Г_5 = 24 \Leftrightarrow Г_4 + 2Г_5 = 0,$ т. е. (т. к. $Г_4$ и $Г_5$ натуральные числа или 0) $Г_4 = Г_5 = 0$ и $Г = Г_3 = 8$.

Итак, граней $Г = 8$ и все они треугольники, $В = 6$, $Р = 12$.

Все же задача еще не решена: не ясно, существует ли вообще указанный многогранник. Но это, например, многогранник из примера 21 или октаэдр.